岐阜数学教育研究
2014，Vol. 13，1-11

# 行列と結び目を用いた中等教育向けの数学教材の実践

川嶋克利[1]，酒井道宏[2]，田中利史[3]

中等教育向けの教材として「行列」及び「結び目」を取り上げる。結び目は空間図形としてとらえると，それらの平面への投影図を行列を用いて調べることにより，その空間図形としての違いを調べることが出来る。本論文では，行列の中等教育における必要性を考察するための，行列を用いた中学生向けの授業案及び実践授業について述べる。

＜キーワード＞　行列，連立１次方程式，結び目，空間図形，投影図

## 1. 序文

平成 26 年 7 月 24 日，25 日に久留米工業高等専門学校において中学生向け公開講座「あなたも１日サイエンティスト」が開催された。数学分野においては，平成21年度より始められ，数学の高度な内容を中学生向けにアレンジし教授している。本論文では，行列及び結び目を扱った中学生向けの授業を提案し，この公開講座における実践報告をする。

行列は工学，物理学，経済学などの，幅広い分野で使われている数学の１分野である，線形代数学で扱われ，大学では初年次，高等専門学校では３年次までに教授される。

一方で，結び目は数学者らによって研究が盛んに行われているが，空間図形として分類するために，行列が用いられている。結び目の投影図の形から行列を構成し，その行列の違いを調べることで，結び目の分類ができる。

本論文では，中学生に対し，行列を用いた連立方程式の解法を考えさせ，結び目の空間図形としての違いの考察を行列を通して行う授業を考案し，実践授業を行った。　高等学校において,「行列」は平成 24 年度より単元がなくなり,「数学活用」において引用されるのみとなっている。したがって行列に関する基本的事項及び発展的な話題について，高等学校において実践を行うことが今後困難になる恐れがある。一方で，高等専門学校においては，その専門教育の基礎として３年次までに線形代数の単元の一つとして行列が教授されているため，行列を用いた実践授業を行うことは比較的容易である。したがって，行列が中等教育にとって必要であるかどうかを推し量る意味において，高等専門学校において行列を用いた教材開発及び実践授業を行うことは，意義があると考える。この研究は本グループにおける，中学生向けの最初のそのような取り組みとなる。

具体的には，以下のように内容を設定し，連続した２回の授業を行った。

平成20年に告示された現行の中学校学習指導要領においては，第２学年において連立方程式の解法が位置付けられている。したがって，それに関連し，連立方程式の解法を行列を用いて行う授業を初回に設定する。

また，中学校学習指導要領の中学校数学科の改善の具体的事項において,「体験に基づく

[1]久留米工業高等専門学校
[2]久留米工業高等専門学校
[3]岐阜大学教育学部

実感的な理解をもとに，身の回りにあるものを図形としてとらえその性質や関係などを明らかにすることや，図形の性質などを根拠を明らかにして筋道を立てて説明したり，その説明から新たな性質や関係を読み取ったりすることを重視する」とある。したがって，2 回目の授業において結び目を数学的にモデル化した空間図形の分類を，行列の発展的内容として扱うことにした。

以上より，行列の基本的な活用法を理解し，さらに結び目を空間図形としてとらえ，空間図形の平面への投影図を通して，行列を用いて空間図形の性質を知ることをねらいとした授業を行うことにした。

## 2. 結び目について

1 本のロープを用意し，自由に絡め両端をつないだものを**結び目**と呼ぶことにする（図 1）。

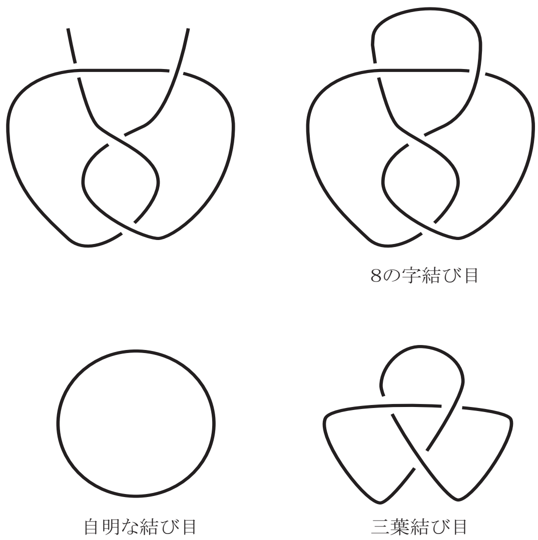



図 1

結び目がほどけて，平面上に平坦に置ける一つの輪となるとき，この結び目は**自明**であるまたは**ほどける結び目**であるという。結び目が自明でない場合は**ほどけない結び目**ということにする。

結び目が自明な結び目であることを示す場合は，それを実際にほどいてみるとよい。一方で，結び目がほどけない結び目であることを示すことは一般に容易ではない。「絡まった結び目が自明な結び目であるか，または，二つの結び目が同じであるか」ということが，結び目の空間図形としての分類をおこなう上で重要な問題となる。結び目が自明な結び目でないことを示す場合，**不変量**という考え方を用いる。結び目をある方法で定式化または数量化し，同じ結び目には同じ式や数量が対応する場合，その式や数量の違いを求めることで，結び目の違いを調べることができる。このような式または数量が不変量である。本論文では，ゲーリッツ不変量という不変量を用いて，結び目の違いを考察する授業を提案する。

## 3. 結び目の図式

結び目の平面への投影図を考える。このとき，結び目の一部を少し移動することで，結び目が重なる点は必ず図 2 のような 2 重点のみであるようにできる。

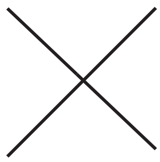


図 2

投影図の各 2 重点に対して図 3 のように，結び目の線分の上下の情報を考えて投影図を描くとき，これを結び目の**図式**といい，そのような 2 重点のことを図式の**交点**という。

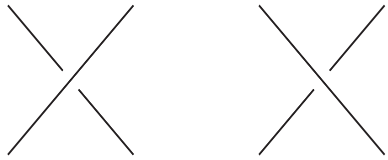


図 3

### 4. 結び目のライデマイスター移動

＜定義＞([2])

結び目の図式において，次の変形（図4）をライデマイスター移動と呼ぶ。

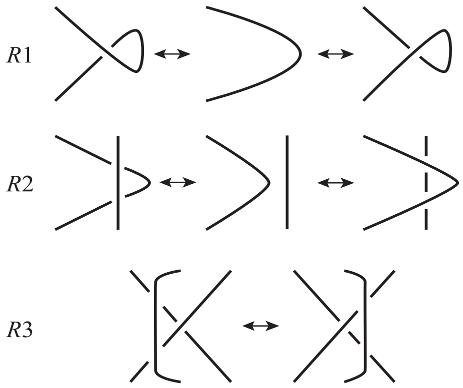



図4

2つの結び目の図式がライデマイスター移動の有限回の操作で移りあうとき，それらの結び目は**同じ結び目である**という。

### 5. 結び目のゲーリッツ不変量

結び目が同じかどうかを調べるために重要となるゲーリッツ不変量を定義する。

＜定義＞

以下のように図式の各領域を白黒交互に塗り分けたものを図式の**白黒彩色**という。

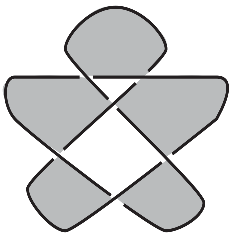


図5

＜定義＞結び目の図式の白黒彩色に対して，各黒領域を $X_1, X_2, \ldots, X_m$ とし，各交点に下のように±1をつけ，これをこの交点の**符号**と呼ぶことにする。このとき，異なる領域の間にある交点の符号の和を**連結指数**という。

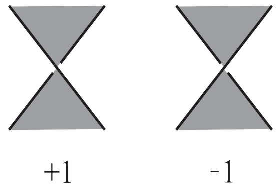



図6

＜定義＞結び目に対し，次のように各成分が連結指数を用いて表される対称行列を**ゲーリッツ行列**という。

$(i,j)$-成分：$X_i$ と $X_j$ の連結指数

$(i,i)$-成分：$-$($i$ 行の残りの成分の和)

結び目のゲーリッツ不変量は，ゲーリッツ行列の任意の1行と1列を削除した行列 $A$ を以下のような操作を用いて，各成分が非負整数である対角行列に変形することにより得られる。

- $A$ を $A$ のある行（列）ベクトルを $-1$ 倍して得られる行列で置き換える。
- $A$ を $A$ の2つの行（列）ベクトルを交換して得られる行列で置き換える。
- $A$ を $A$ のある行（列）ベクトルの整数倍を他の行（列）ベクトルに加えてできる行列に置き換える。
- $A$ が $B \oplus (1)$ の形のとき，$A$ を $B$ に置き換える。

＜定義＞ゲーリッツ行列の任意の1行と1列を削除した行列 $A$ に対して，上記の操作を有限回行い，次の条件1，2を満たすような一意的な対角整数行列 $(k_1) \oplus (k_2) \oplus \cdots \oplus (k_d)$ にすることが出来る。（この行列は，最初に削除する行ベクトル及び列ベクトルの選び方によらないことが知られている。）

条件1　$d = 1$ のとき，$k_1 \geqq 0$ が成立する。

条件 2　$d \geqq 2$ のとき，$k_i \geqq 0$ かつ $k_i \neq 1$（$1 \leqq i \leqq d$）であり $1 \leqq i \leqq d-1$ のとき $k_{i+1}$ は $k_i$ の整数倍となることが成立する。

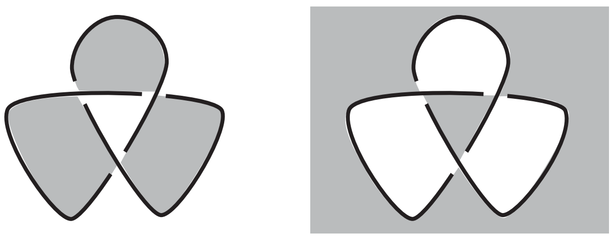
　このとき，非負整数列 $(k_1, k_2, \ldots, k_d)$ を行列 $A$ の**ねじれ不変量**という。

＜定理＞ ([2])
　結び目の図式のねじれ不変量はライデマイスター移動で変わらない。

　この定理により，ゲーリッツ不変量は結び目の不変量であることが分かる。

＜定義＞（ゲーリッツ不変量）結び目 $K$ の図式のゲーリッツ行列から，任意の 1 行と 1 列を除いて得られる行列のねじれ不変量を $K$ の**ゲーリッツ不変量**と呼ぶ。

＜例＞（三葉結び目）
　図 1 における三葉結び目の図式に対して，次のように 2 通りの白黒彩色を考える。



$(a)$　　$(b)$

図 7

　白黒彩色 $(a)$ に関するゲーリッツ行列は次のように得られる。

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって，ゲーリッツ不変量を求めると（3 行目と 3 列目を削除して），

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to (3)$$

以上よりゲーリッツ不変量は (3) となる。

　一方で，白黒彩色 $(b)$ に関するゲーリッツ行列は次のように得られる。

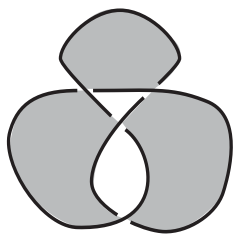
$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

したがって，ゲーリッツ不変量を求めると（2 行目と 2 列目を削除して），

　$(-3) \to (3)$

よって，やはりゲーリッツ不変量は (3) であることが分かる。

＜例＞（8 の字結び目）
　8 の字結び目の白黒彩色の例，ゲーリッツ行列及びゲーリッツ不変量は以下の通りである。



白黒彩色

　ゲーリッツ行列：

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

　ゲーリッツ不変量：　(5)

### 6. 授業の概要

(1) 教材について

本論文で紹介する授業の教材は，行列と結び目である。それらを題材として扱う理由を以下に示す。

● 行列について

1. それまで扱ったことのない多次元の量をあつかうものであり，生徒の興味関心を得ることができる。
2. 中学で扱う内容と関連づけができる。
3. 関係した発展的内容が豊富である。

● 結び目について

1. 日常の生活の中でひもを結んだり，結んだひもをほどこうとすることはよくあることであり，教材が身近に感じられ数学の有用性が生徒に伝わりやすい。
2. 結び目は変形が容易であり，多様な活動ができる。

(2) 授業のねらい

本授業のねらいを以下のようにした。

$(a)$ 行列の積を求めることができる。

$(b)$ 行列を用いて簡単な連立方程式を解くことができる。

$(c)$ 結び目の図式を描くことができる。

$(d)$ 結び目の図式の白黒彩色ができる。

$(e)$ 結び目の図式から行列を求めることができる。

$(f)$ 三葉結び目のゲーリッツ不変量を求めることができる。

$(g)$ 行列を用いて結び目を区別できる方法があることを知る。

(3) 授業の構成

ここで授業案の流れを説明する。

1. 第 1 時

1. 行列の具体例を提示し，スライドを用いて行列が現実事象で応用されていることについて簡単に紹介する。
2. 本時の課題を与える。

課題

ある中学校の生徒 100 人が学力テストを受験した。全体の平均点は 64 点で，男子の平均点は 62 点，女子の平均点は 67 点であった。男子，女子の人数はそれぞれ何人か。

3. 連立方程式の立式の仕方について授業者が説明する。
4. 連立方程式の代入法，加減法による解き方を，具体的な問題を用いて説明する。
5. 行列による連立方程式の解き方について具体例を挙げ説明する。
6. 行列の実数倍，積について授業者が説明し，生徒が演習に取り組む。

演習．次の行列の実数倍，積を求めよう。

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} =$$

7. 行列の行列式及び逆行列を公式として与える。行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

に対して，$|A| = ad - bc$ を**行列式**という。

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくとき，$\frac{1}{|A|}\tilde{A}$ を $A$ の**逆行列**といい，$A^{-1}$ と書く。

$$A \cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることに注意する。

8. 連立方程式の行列を用いた表し方について説明する。

9. 生徒が連立方程式の演習問題に取り組む。

**演習．** 次の連立方程式を行列を用いて解いてみてください。

$$\begin{cases} 5x+3y=1 \\ 3x-5y=21 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} -2x+y=5 \\ 3x+2y=11 \end{cases} \tag{2}$$

10. 生徒が課題問題に取り組む。

11. 生徒が成果を発表する。

12. 授業者が解答を行う。

男子，女子の人数をそれぞれ $x$ 人，$y$ 人とする。

立式

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 62x+67y=6400 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 62 & 67 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 100 \\ 6400 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 62 & 67 \end{pmatrix}$$

とおくと，両辺に $A^{-1}$ をかけて，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 100 \\ 6400 \end{pmatrix}$$

公式より，$|A|=5$ なので，

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 67 & -1 \\ -62 & 1 \end{pmatrix}$$

より，

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 67 & -1 \\ -62 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，計算により $(x, y) = (60, 40)$ となる。
以上より，求める人数は男子 60 人，女子 40 人である。

2. 第 2 時

1. (導入)　針金を用いて作成した結び目を提示し，またスライドを用いて結び目の現実事象での例について紹介する。

2. 結び目及び図式の定義を行い，具体例を挙げる。

3. 授業者の指示に従い，生徒が指定された例を書く。

4. ライデマイスター移動の定義を行い，授業者は具体例を挙げ，ゆっくりと丁寧に説明する。

5. 白黒彩色を定義し，生徒が結び目の図式の例を書いて，白黒彩色を作成する。

6. ゲーリッツ行列を定義し，生徒が5の例を用いてそれを作成する。

7. 不変量の意味を授業者が説明し，課題を提起する。

課題

三葉結び目や8の字結び目はほどくことができるか？

8. ゲーリッツ不変量を定義する。

9. 授業者が行列の変形の仕方について，例を用いて丁寧に説明を行う。（板書の方が望ましい。）

10. 生徒が行列の変形の練習を行う。

**演習.**

次の行列を，1行1列の行列に変形せよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

11. 生徒が課題に取り組む。

12. 生徒が三葉結び目のゲーリッツ不変量が自明な結び目のゲーリッツ不変量と異なることを確かめる。

13. 2通りの白黒彩色を用いても三葉結び目のゲーリッツ不変量が変わらないことを確かめる。（第5節の例を参照。）

14. 生徒が成果を発表する。

15. 授業者が8の字結び目のゲーリッツ不変量の計算を紹介する。

気付いたこと

・三葉結び目はほどけない。

まとめ

空間図形は投影図の特徴を調べることで，その違いを明らかにすることができる。

(4) 教師の指導・援助

- 行列の説明を行う。
- 行列の実数倍や積について，板書，スライドを用いて丁寧に説明する。
- 連立方程式の行列表示についてゆっくりと説明する。
- 行列を用いた連立方程式の解法について，指導補助学生と共に机間指導をしながら説明を行う。
- 結び目の説明を行う。
- 結び目を提示し，その図式の描き方及び注意点を説明する。
- 図式のライデマイスター移動について，針金，板書，スライド等を用いて丁寧に説明する。
- 行列の変形及び結び目のゲーリッツ行列の求め方を板書，スライドを用いてゆっくりと説明する。
- 8の字結び目のゲーリッツ不変量をスライドを用いて示す。

第１時における数学的活動は，具体的な問題に対し，連立方程式を立式し，さらに行列表示を用いて解を求めることである。演習問題をしながら，行列の基本的性質及びその応用の仕方について知ることを目標としている。

一方で，第２時における数学的活動は，結び目の図式の白黒彩色を作成し行列を求め，行列の変形をすることである。練習問題を用いて，行列の計算をする時間を十分にとり，生徒がゲーリッツ不変量の計算ができるようになること，及びゲーリッツ不変量が (0) でないことが，結び目がほどけないことの理由となっていることを知ることが目標である。

### 7. 実践結果

以下のとおりに実践を行った。
場所：久留米工業高等専門学校
日時：平成 26 年 7 月 24 日
参加生徒：中学生 1〜3 年生 5 名
指導補助学生：2 名
久留米工業高等専門学校
生物応用化学科 3 年 田中穂乃香
生物応用化学科 3 年 平田有里惠

(1) 授業の流れ（教師の指導・援助）
以下のような流れで授業を行った。

第１時（連立方程式と行列）

(a) 連立方程式の説明
スライドを用いて，連立方程式の代入法，加減法による解き方の説明を行った。

(b) 連立方程式の行列による表示の紹介
スライドを用いて，具体的な連立方程式の行列表示の説明を簡単に行った。

(c) 行列の和，スカラー倍，積の説明
一般的な行列の和，積について定義し，具体的な計算の演習を行った。


(d) 連立方程式の行列による求め方の説明
連立方程式を行列で表し，どのようにして解を求めるかについて，2 行 2 列の行列の逆行列，行列式を定義し，順をおって説明した。最後に演習問題を行った。

第 2 時（結び目の数学―ゲーリッツ不変量をめぐって―）

１時間という時間の制約のため，次のような形の実践を行った。

(a) トポロジーの概念の説明
パワーポイントのアニメーション機能を利用し，円，三角形，四角形がトポロジーの意味では同じ図形であることを説明した。

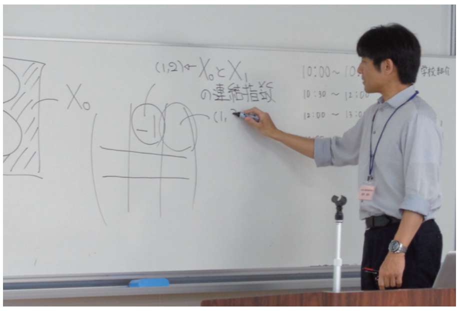
(b) 結び目の概念の説明
パワーポイントのアニメーション機能を利用し，一重結び目から三葉結び目への変形を説明した。更に，[6] および [7] での反省から，結び目の模型を用いて生徒が，上記の変形を再現する作業を取り入れた。

(c) ライデマイスター移動の説明
結び目の図式のライデマイスター移動を定義し，一重結び目から三葉結び目への移動をスライドを用いて説明した。

(d) 結び目の不変量の説明及び課題の提示
ライデマイスター移動で移り合わない図式を持つ結び目が異なることを示すために，不変量の概念を説明し，簡単

に区別するためにはどのようにしたら良いかという課題を提示した。

(e) ゲーリッツ行列の説明
図式の白黒彩色を定義し，三葉結び目の図式に対して演習を行った。次にゲーリッツ行列を定義するために，連結指数の求め方の演習を三葉結び目の図式を用いて行った。その後，ゲーリッツ行列を定義し，計算例をスライドを用いて提示し，演習を行った。



(f) ゲーリッツ不変量の説明
ゲーリッツ不変量を定義した。行列の変形に慣れてもらうために，説明後に簡単な演習問題を課した。教員と指導補助学生で机間指導を行い，演習作業のサポートを行った。

(2) 実践結果とその考察

授業後にアンケートを実施した。その回答及び授業中の生徒の様子をもとに，本授業のねらいの達成度の考察を行う。

(a) アンケートの質問項目とその結果

アンケートの質問項目は次のとおりである。

1. 数学講座を受講しての感想について

（1）講義の内容はどうでしたか

ア．よく理解できた，イ．だいたい理解できた，ウ．少しだけ理解できた，エ．ほとんど理解できなかった

（2）計算や実習のレベルはどうでしたか

ア．かなり難しかった，イ．少し難しかった，ウ．普通，エ．少し簡単だった，オ．かなり簡単だった

（3）数学講座の内容はどうでしたか

ア．大変有意義だった，イ．有意義だった，ウ．あまり役に立たなかった，エ．わからない

（4）数学講座を受講しての満足度を教えて下さい

ア．充分満足した，イ．おおむね満足した，ウ．普通，エ．あまり満足できなかった，オ．全く満足できなかった

2. この公開講座に対する感想や意見があれば自由に書いてください。

以下，アンケートの結果である。

- （1）について　ア　1名，イ　1名，ウ　0名，エ　3名
- （2）について　ア　3名，イ　2名，ウ　0名，エ　0名，オ　0名

- (3) について　ア　1名，イ　2名，ウ　0名，エ　2名
- (4) について　ア　1名，イ　1名，ウ　3名，エ　0名，オ　0名

アンケートの結果から，授業の内容が全体的に生徒にとって難しく，理解できなかった生徒が少なくなかったことが分かる。一方で，内容が有意義であったと答えた生徒が3名おり，またアンケート項目2において,「数学にも様々な分野があることがわかりました」や「またやってください」等の意見があったことから，内容の難しさが，生徒の授業の満足度に直接，悪い影響を与えるわけではないように思えた。生徒の理解ができるように，まず演習等を工夫し，生徒が達成感を感じることが出来るようにすることで，授業に対する満足度は更に向上すると思える。したがって，今後はそのような授業の構成を試みたいと考える。行列が中等教育にとって必要であるかを考察するためには，このような実践を積み重ね，改良していく必要があると感じた。

(b) 授業の比較及びねらいの達成度

第1時

行列の積について，生徒は定義を見ながらなんとか計算できるようになった。さらに，行列の積の非可換性まで確認する生徒がいた。一方で，連立方程式を解く際に，生徒は逆行列の定義を見ながら行っていたが，かなり大変な様子であった。演習の後の解説でも，納得できない様子の生徒がいた。したがって，行列の計算についてのねらい ($a$) については達成できたと考えるが，連立方程式の計算については，時間内に行列を用いた計算を，生徒が十分に理解できるまでには至らなかったように思えるため，ねらい($b$) に関しては，達成することができなかったと考える。

第2時

ほとんどの生徒が結び目の図式から行列を求めることは出来たものの，そこからゲーリッツ不変量の導出にたどり着くことの出来た生徒は少なかった。よって，ねらい ($c$) ($d$) ($e$) については，達成することができたが，ねらい ($f$) については達成できなかったと考える。ただし，三葉結び目がほどけないことが，ゲーリッツ不変量を用いて分かることを知ることができていたように思うため，ねらい (g) については達成できたと考える。

## 8. これまでの実践例

結び目を用いた教育研究プロジェクトが2005年より5年間，大阪で行われている。(参考文献 [1], [3], [4], [5]) 一方で，本グループにおいては，結び目理論を用いた授業実践研究を [6], [7], [8], [9] において行ってきた。特に，参考文献 [8] においてゲーリッツ不変量に関する高専の学生向けの授業実践を行っているが，本授業では中学生向けの授業の構成を行った。

## 9. 反省と今後の課題

アンケートの結果から分かるように，今回の実践の内容は中学生にとって，決して容易なものではなかったように思える。

第1時において，文字式の扱いに習熟していない生徒は，逆行列の公式がうまく使えず，実際に連立方程式を行列で解く演習では，かなり時間を要していた。このため，行列の演習においては，そのやり方や時間配分を工夫する必要があるように考える。

一方で，第2時においては，行列から，その変形を通してゲーリッツ不変量を求めることが出来た生徒が少なかった。限られた時間の中で，演習に割く時間を十分にはとれず，行列の変形に慣れさせることが出来なかったことが，この主な要因と考える。さらに，本実践において，第2時は第1時の内容の発展的な内容として行ったが，あまり関連付けをす

ることができていなかったのも，この原因の一つであると思える。そのため，今後の課題として，第１時と第２時の関連性が，より明確になるような授業展開を考察することが挙げられる。

行列とその応用を扱った今回の教材は，中学１年生から３年生までの幅広い受講生に対応させることは困難であった。ただし，1年生であっても意欲的に取り組む生徒もおり，受講生の理解度の差は必ずしも知識の量の違いによるものではないことが推察される。今後は，幅広い受講生に柔軟に対応できうる教材の作成に努めていきたいと考える。

指導補助学生の感想

手元に模型があったことで，図形の想像がしやすかった。中学１年生の子どもについても，授業の内容が理解できていて，実際に計算ができるようになっていたことは，よかったと思う。一方で，１時間で，中学生に行列を教えて計算できるようにすることは難しいと思った。１時間で計算方法を教え，もう１時間で連立方程式などの解き方を教えれば，もっと理解してもらえたと思う。パワーポイントだけでなく，ホワイトボードをもっと活用して，計算過程をもっと詳しくゆっくり説明した方がよかったと思う。

## 10. 謝辞

実践授業を行う上で指導補助をして頂いた，久留米工業高等専門学校生物応用化学科３年の田中穂乃香さんと平田有里恵さんに感謝する。

## 11. 参考文献

[1] 河内明夫・柳本朋子編, 2005 年, 「結び目の数学教育」への導入―小学生・中学生・高校生を対象として―, 21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動　研究報告書　第１号.

[2] 河内明夫, レクチャー結び目理論, 共立出版 (2007).

[3] 河内明夫・柳本朋子編, 2007 年, 「結び目の数学教育」への導入―小学生・中学生・高校生を対象として―, 21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動　研究報告書　第２号.

[4] 河内明夫・柳本朋子編, 2009 年, 「結び目の数学教育」への導入―小学生・中学生・高校生を対象として―, 21 世紀 COE プログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成（大阪市立大学）」における教育活動　研究報告書　第３号.

[5] 河内明夫・柳本朋子編, 2014 年, 「結び目の数学教育」への導入―小学生・中学生・高校生を対象として―,　研究報告書　第４号.

[6] 酒井道宏, 田中利史, 中坊滋一, 2012 年,「結び目を用いた中学生向け数学教材の実践」, 岐阜数学教育研究, 第 11 巻, pp. 76-83.

[7] 酒井道宏, 田中利史, 2013 年, 「合同式と結び目を用いた中等教育向けの数学教材の開発及び実践」, 岐阜数学教育研究, 第 12 巻, pp. 34-41.

[8] 酒井道宏,　田中利史,　中坊滋一, 2013 年,「結び目を用いた高専の学生向け数学教材の実践～ゲーリッツ不変量を通して～」,　久留米工業高等専門学校紀要, 第 28 巻, 第 2 号, pp. 24-31.

[9] 宮地俊彦, 中坊滋一, 酒井道宏, 2010 年,「久留米高専における中学生向け数学公開講座の取り組みと今後の課題」, 久留米工業高等専門学校紀要, 第 25 巻, 第 2 号, pp. 19-24.