岐阜数学教育研究
2013,Vol.12,59-64

# 加重平均を援用した数学的関係の理解について
## ― 数学的モデリングの観点からの考察も含めて ―

稲葉芳成[1]，河崎哲嗣[2]

中等教育における数学的な諸概念の理解を助けるものとして，対象となる概念のモデル化，数学的モデリングは方法論的に重要なもののひとつである。数学的モデリングの過程である，「現実事象を数学的対象としてとらえること」，引き続いて「対象を数学的に処理すること」を大きな柱として，現実事象を数学的に解析する能力を育成することの重要性は言うまでもない。一方で数学の問題や数学的な諸関係に現実的な現象的意味づけを行い，与えられた問題や関係を数学的なモデルを通じてよりわかりやすい性質に置き換えて理解することも重要である。ここでは，高等学校レベルの教材の中から，加重平均という考えを用いることによって理解することができるいくつかの例を考察しながら，数学的モデリングにおける若干の留意点について触れることにする。

〈キーワード〉：加重平均，モデリング

### 1. はじめに

これまでにも，様々な数学的な問題を釣り合いという観点や重心の位置あるいは加重平均の考えを用いて理解する取り組みがなされ，その実践も数多く見られる。食塩水の濃度の問題や，位置ベクトルの問題など実践報告も散見され，重さと釣り合いという観点の有用性を物語るものでもある。しかし，ここではモデリングという観点からそれを捉え直しながら，それらを再考しておきたい。数学的モデリングの一般的な形態は，現実の事象を数学化し，その数学的性質をもって現実の事象を理解・説明しようとする態度である。しかし，広義には，数学的な問題を，別の数学的な概念に基づくモデルによって理解・説明しようとする態度もまた数学的モデリングと言ってよいであろう。こうした手法は何も目新しいものではなく，これまでも数学の様々な問題の解法の中で，時には代数学的な問題に幾何学的な解法が存在するという場面は珍しいものではなかった。そのような意味では，数学的モデリングでは，現実の事象の数学化と共に，最適な数学化という意味においてのある種の階層性が存在しうる。

| 現実の事象 | → | 数学的対象A | → | 数学的対象B | … | 数学的理解 |
|---|---|---|---|---|---|---|

その中にあって，どのレベルから出発するかによって詳細には異なることはあろうが，数学的モデリングという方向性を失うものではない。ここではそのような意味で，必ずしも現実の事象の理解ということにはならないが，数学的な問題を別の概念で意味づけすることができるもののひとつとして，重心や加重平均の概念をとりあげることにする。

線分の中点や三角形の重心は初等的な題材であって，視覚的にも直観的にも把握しやすい。平面座標で考えても$\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2)$を結ぶ線分ABの中点Mの座標は$\mathrm{M}(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$であるし，点$\mathrm{C}(x_3, y_3)$を付け加えて△ABCの重心Gも$\mathrm{G}(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$で与えられるから，形も綺麗で覚え易い。この中点や重心は実際のところの意味として，「釣り合い」の位置を表すことも周知の通りである。この場合の理解として，線分の中点では，線分が均質な重さを持つものとしてその釣り合いの位置が中央にくるものと理解すればよいし，三角形の場合にはこれもまた均質な三角板の釣り合いの位置が重心であると理解すればよい。別の理解では，重さのない棒の先端あるいは三角形の各頂点にあたる部分に同一の重さの錘があると考えても良い。こうした理解はモデル化の最も簡単なもののひとつで，線分の重さをあたかもその１点に存在する錘として理解することで，より単純な対象物に置き換えているということになる。この点では「釣り合い」の位置を考えさせることは，数学的モデルとして好ましいものであると言える。さらに，一般の分点を考える場合にも加重平均（重み付き平均）の考えを用いることによって，理解することが容易となる。中等教育の数学におけるモデリングの実際は，対象となる数学的な諸概念に対す

1 立命館宇治高等学校
2 岐阜大学教育学部

る視覚的な意味付けの性質を色濃く持つが，モデリングの方法やモデル化されたものが理解しにくいものであったり，モデル化のプロセスが理解し難いものである場合には誤解を生ずるなどの，弊害が生じる対象もある。その点，「重心」や「釣り合い」といった対象は，生活の中で自然に感覚的に理解されている部分もあって，学習者に馴染みが深いものである。勿論，それ故に感覚的な誤解も生じやすいという面もあるが本稿では，このような「重心」または「釣り合い」を用いた数学的モデルの教材についていくつかをその評価も含めて考察していくことにする。

## 2. 統計分野での利用

最も基本的な例としては，単純な算術平均がある。この概念はあらためて述べるまでもなく，初等的なものであって，小学生のあたりからよく親しまれるものと言って良い。しかしながら，統計学の基礎の分野や資料の整理等の場面において，中央値の概念との区別がつかない，あるいは混同してしまう学習者が少なくない。これは，算術平均の「足して割る」式の代数的パターン認識が先行し，幾何的イメージが伴っていないことに起因するものだと考えられる。この点では，算術平均を数直線上で視覚化することで，釣り合いの位置という認識を持たせることは重要である。また，このことにより，中央値と平均値の統計学上の差異をイメージとして掴むことができる。その意味は，中央値と平均値が，「外れ値」によってどのように変化するかなどの例を視覚的に示しやすいことによる。

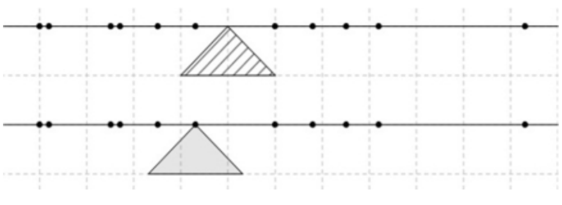

図 1

同じ数値群の平均値と中央値を考えた場合に上図 1 のように図示することで理解の一助になることは確かである。上側の図はまさに釣り合いの支点を平均値として捉えている。この場合に例えば最も右側の点の位置がもう少しずれることによって平均値が動くこと，つまり外れ値が平均値に大きく影響することも直観的に理解される。これに対して，下側の図はある意味単に中央値の位置を示したものとして捉えるならば，このような変化に対しても順序関係に変化が無ければ中央値は不変であるという性質も理解し易い。

また，度数分布表からの平均値の算出は，度数を重みとみれば，階級値との積をとっての加重平均を求めていることに他ならない。このような意味では，資料の整理における図 2 のようなドットプロットは平均値がちょうど加重平均となることについて，視覚的に見やすい教材である。これに対して，統計分野の標準的な教材としてよく用いられるヒストグラムは，勿論その意義を減じるわけではないが，学習者は単なる棒グラフとして理解してしまうことがよく見受けられる。ドットプロットからヒストグラムへの移行という段階的な説明を経るほうがこうした基本的な統計量の理解を一層得やすくするものと考える。

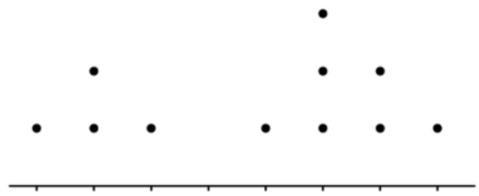

図 2

実際に第一著者である稲葉はここ数年間にわたり高校現場で記述統計の授業を担当しているが，例えば上述のような平均値と中央値の違いについての視覚的な説明の方法は生徒に「わかりやすい」，「違いがよく理解できた」などという感想をもらうなど好評なもののひとつである。

## 3. 加重平均の基本事項

ここでは加重平均の基本事項について簡単に見ておく。加重平均は初等的な計算のみの概念であるが，数学の教科書にその意味がきちんと示されることを知らない。その意味では学習者には馴染みがないもののひとつである。勿論のこと理科や物理学の知識を持ち合わせている生徒にとっては既知のことであるが，そういった生徒は甚だ小数である。一例として，学習者が誤解する，あるいは極めて誤答が多い次のような問題を紹介しよう。

問題「次のような四角形 ABCD の重心の位置を求めなさい」

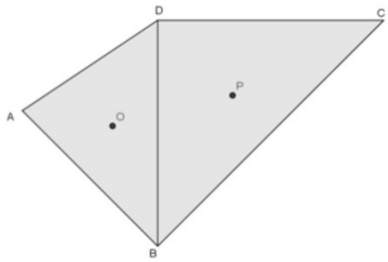


図３

この問題では，三角形の重心の位置が既習であれば四角形を例えば図３のように左右に分割してそれぞれの重心の位置 O, P を知ることは容易である。しかしその先が問題であって，四角形 ABCD の重心の位置は線分 OP の中点にはならない。実際には点 O と点 P にはそれぞれ△ ABD と△ CDB の重さがかかっているために加重平均を考えることになる。したがって線分 OP をその面積比に内分する点を求めなければならない。このあたりの基本的事実の認識から理解させていくことが必要である。

次にもうひとつ同様の問題を考えてみる。これは実際に教室内で投げかけたときに誤答あるいは誤認の多かった問題のひとつである。

問題「中身の無い三角形 ABC，つまり線分 AB, BC, CA でできた三角形の釣り合いの位置を求めなさい」

この問題は，均質な針金で作った三角形の釣り合いの位置を求めるというものであるが，多くの生徒はこの釣り合い（重心）の位置を，中身のある三角形の場合と同様に三角形の重心の位置と答えるのである。実際に，これも勤務校の高校生文系 3 年生 20 名の講座でこれを問うたところ正解者は出てこなかった。この問題では，3 線分の中点の位置に線分の重みがつき，それぞれの線分の長さが異なる場合には，各中点の重みが異なるので，3 点での重み付き平均即ち，加重平均を考えなければならない。しかし，生徒達には加重平均の考えに実際には馴染みがないのである。

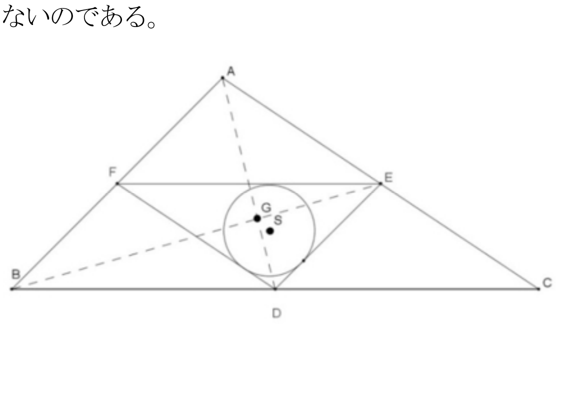


図４

正解としては３辺の中点が作る三角形の内心が求めるべき点であって，その点は Spieker Center としてよく知られている。

生徒達にこの誤答が多いのは，あまりにも通常のソリッドな場合の三角形の重心の概念が定着してしまっているが為に，周のみの三角形でも直観的に同様に解答してしまうという面と，やはり加重平均の考え方に馴染みが無いという面の両面があると思われる。前者は，特に数学的なモデルを考える，あるいは生徒に提示する場合に，直観的な理解が先行しすぎると，その奥にある数学的な理解をかえって阻害する場合があるという，一例ともなっている。このことは数学的モデルの取り扱いには留意すべき事項があるということを示している。次に最も基本的な加重平均を「釣り合い」という点から復習しておこう。

(1)　重み付き質点の釣り合い

まず，簡単に線分の場合から始める。数直線上 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)$ に対して，線分 AB の端点にそれぞれ $m, n$ の重さの錘をつけて，その釣り合いの位置を考える。釣り合いの位置（支点）を $\mathrm{P}(p)$ として，P の位置は支点からの距離と重さの積（モーメント）を考えて，$m(p-a)=n(b-p)$ を解くことにより，$p=\frac{ma+nb}{m+n}$ となる。これは線分 AB を $n:m$ に内分する点に他ならない。

そして $p$ の位置は点 A, B の加重平均とも呼ばれる。

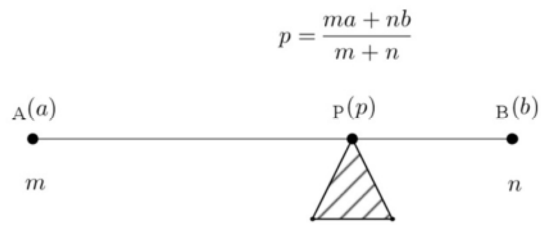


図５

次に，平面上の 3 点の場合を考えよう。3 点の場合には，はじめに 2 点を選び，その加重平均と残りの点との加重平均を考えればよいから，その意味では，3 点以上に点が増えても求める思考のプロセスは変わらない。それ故，3 点より多い場合については省略する。

いま，平面上の 3 点 $\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2), \mathrm{C}(x_3, y_3)$ に対して，それぞれ $m_1, m_2, m_3$ の錘をつけて，その

釣り合いの位置を考える。この場合の釣り合いの座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3},\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$$

として求めることができる。また次のようにも解釈できる。

図 6 で，$\Delta\,\mathrm{BCP}=\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\Delta\,\mathrm{ABC}$であって，同様にして結局 P は△ABC を

$$\Delta\,\mathrm{BCP}:\Delta\,\mathrm{CAP}:\Delta\,\mathrm{ABP}=m_1:m_2:m_3$$

に分ける点であるということがわかる。この性質から，先の Spieker Center の位置も説明ができる。

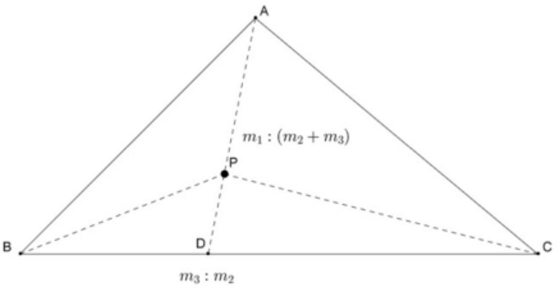


図 6

⑵ 線分の外分点の理解

線分の分点については，内分点が上記のように容易に理解されるのに対して，学習者に外分点の理解や定着が進まないことをしばしば経験する。内分点は「与えられた量を切断する」というようなイメージを容易に持つことができるのに対して，外分点は与えられた量が，増える中での比を考えなければならず，直感的にその方向にどれだけ増やせば良いかを想像することが難しい。あらためて述べるまでもなく，内分点はそれを支点とした釣り合いで容易に理解されるが，外分の場合には釣り合いのモデルとして考えた場合に，支点がちょうどその外分点にあると考えられるので，一方に負の重さの錘をつけて，釣り合いを考えるようなものである。したがって，「錘と引き上げの釣り合い」として理解することになる。

著者の経験では，文科系の生徒へのこの例の提示による説明に対しては，「内分点の理解は通常の釣り合いということで理解できるが，外分点に関しては，理屈として説明されたらわかるが，自分では図をかくことすら難しい。それよりも代数的に$p=\frac{-na+mb}{m-n}$で覚えたほうがよい」との声を多数聞いた。これはモデル化の理屈としてはそれで問題ないのであるが，必ずしもモデル化がその概念の理解を著しく向上させるかどうかという意味において，うまく成功しているとは言えないものであるとも考えられる。

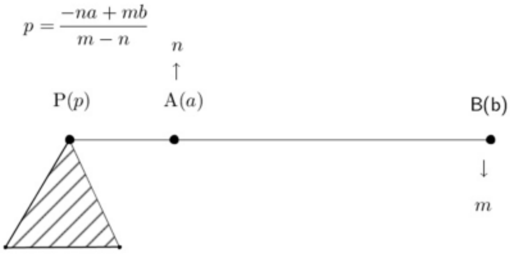


図 7

4. 加重平均のベクトルへの応用

加重平均の応用を考えるとき，最も簡単なのがベクトルへの応用である。通常，ベクトルは数理物理における重要な概念のひとつでもあり，道具でもあるが，高校数学におけるベクトルの理解については，生徒にとって壁が高いもののひとつである。その点，加重平均はモーメントという質点に対する量として捉えられるから，もともとベクトルとの親和性が高い。その意味では多くのベクトルに関する性質を重心や加重平均の概念を用いて説明することができる。ここでは，簡単な例を見ておこう。これも有名なものであり高等学校用のどの検定教科書にも登場するような典型的な問題である。

問題「三角形ABCに対して，$3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$を満たす点 P はどんな点か」

この場合の標準的な解答は，きわめて代数的なもので，

$$3\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{PA}+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$
$$6\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\times\frac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$$

の計算から，P の位置を，辺 BC を$1:2$に内分する点 Q に対して，AQ の中点となることを求めるというものである。しかし，この問題の与式は，加重平均あるいはモーメントで考えれば，三角形内部の点 P から PA, PB, PC だけ離れた位置に重さが，それぞれ，$3,2,1$の錘をつけた場合に釣り合うことを示している。実際に，つりあいの式を位置ベクトルで表現し

た式を作ると

$$\overrightarrow{OP}=\frac{m_1\overrightarrow{OA}+m_2\overrightarrow{OB}+m_3\overrightarrow{OC}}{m_1+m_2+m_3}$$

であるから，ちょうど$A=O$としたときの式と一致する。この例では，問題そのものが，質点の釣り合いの位置をベクトルで表現したものである，という面を持つから，そのことをそのまま理解するほうがむしろ自然なもので，代数的に処理させるほうがむしろ不自然のような気さえする。

また，この例では最も単純な三角形の頂点から辺の分点への線分の交点の位置ベクトルの問題も同様に考え得ることを示している。よくある教科書的な問題で，「三角形 ABC に対して，線分 AB を$2:1$に内分する点 D と線分 AC の中点 E をとる。線分 CD と BE の交点を P とするとき$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$で表せ」

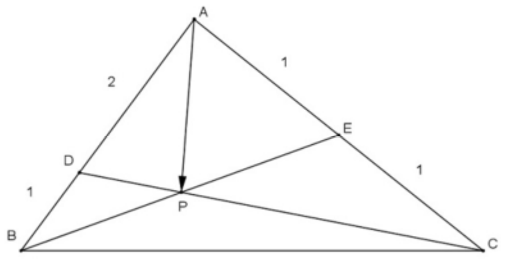


図 8

という問題でも点 A に 1，点 B に 2，点 C に 1 の錘をつけた釣り合いを考えて，$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$を満たす点 P の位置を求めているにすぎない。その意味では，ベクトルの分野では他にも加重平均が奏功するモデル化の対象は数多くあると考えられる。

## 5. 不等式への応用

いま，不等式$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)}$を考える。この証明は，両辺の平方を考えてからその差をとれば，容易に示すことが出来る。右辺の 2 乗から左辺の 2 乗をひいて，

$$\begin{aligned}&2(a+b)-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\\&=a+b-2\sqrt{ab}\\&=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0\end{aligned}$$

(等号成立は$a=b$のとき).

そして，次に同様に$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leq\sqrt{3(a+b+c)}$を考える。しかしこれを示すことは先の問題よりもかなり難度が上がる。翻って，この不等式を別の角度で捉えてみよう。図 9 のように，関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを考える。$x$軸上に 2 点$a,b>0$をとり，そのときの放物線上の点$(a,\sqrt{a})$，$(b,\sqrt{b})$に質量 1 の錘を考える。このとき，この 2 つの錘の重心は単純に，点$\left(\frac{a+b}{2},\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)$にある。

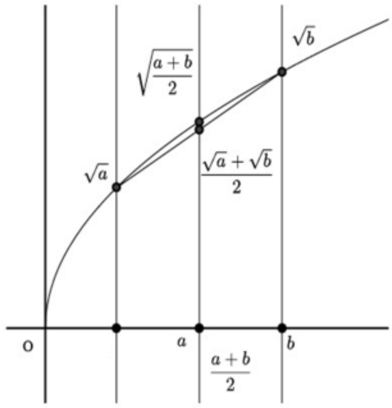


図 9

そして，$y=\sqrt{x}$ が凹関数であることから，

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)}$$

また，これを 3 点にして考えても，凹関数の性質から同様に示すことができる。これらの不等式はグラフで考えると，よりその意味がわかりやすい。

## 6. 整数の性質への応用

これもよく知られた結果ではあるが，数直線上での加重平均を用いれば視覚的に整数や自然数などについてのある種の数理的な性質を理解することができる。ここでは一例として自然数のべき乗和について見ておく。この部分の記述は本質的に文献 [2] による。いま，数直線上の原点 A に支点を置き，正方の座標の位置 B～G に重さ 1 の錘をそれぞれ置くものとする。

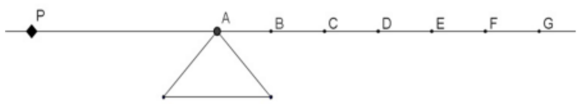


図 10

このとき，それに釣り合う左側について，重さ 6 が 1 点 P に集中したと考えてもよい。そしてその位置は，ちょうど，図のように$-1$から$-6$の中点にあることは明らかである。したがって，これを重さと支点からの距離の積の和の等式に表すと以下のようになる。

$$6\frac{1+6}{2}=1+2+3+4+5+6$$

このことを一般化して，$n$までの部分和で考えると同様に次の式を得る。

$$n\frac{1+n}{2}=1+2+3+\cdots+n$$

$$\frac{n(n+1)}{2}=1+2+3+\cdots n$$

さらに次の場合を考えよう。いま，数直線上の原点に支点を置き，正方向の各座標にそれぞれ，座標の位置に比例する重さの錘を置くものとする。例えば，いま，座標１（B）のところには１，座標２（C）のところには２，座標３（D）のところには３，という具合である。そうしていま，図 11 では 1 から 6 までの錘があるとする。このとき，それに釣り合う左側について，重さ$1+2+3+4+5+6$が１点 P に集中したと考えてもよい。そしてその位置は，ちょうど，図のように重さを１ずつに分解して考えてできる三角形の重心の位置にある。

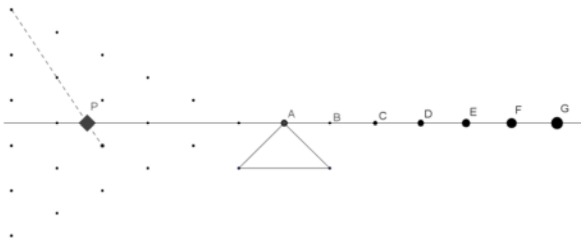


図 11

つまり，$-1$ と $-6$の点を$2:1$に内分する点である。したがって，これを重さと支点からの距離の積の和の等式に表すと以下のようになる。

$$(1+2+3+4+5+6)\frac{6\times 2+1\times 1}{3}$$
$$=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$$

このことを一般化して，$n$までの部分和で考えると同様に次の式を得る。

$$(1+2+3+\cdots+\mathrm{n})\frac{n\times 2+1\times 1}{3}$$
$$=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$
$$\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{2n+1}{3}=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$
$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

ここで，自然数の和が$\frac{n(n+1)}{2}$となることは，前述の結果を用いている。これにより自然数のべき乗和の公式が得られた。この例では，加重平均と直接的な関連性の無い代数的な分野についても，いくつかの応用が考えられることを示している。しかし実際にはモデル化の思考方法が，何ら基礎知識無しにここまで出来るものとは考えにくい。そのような意味では，モデリングの可能性を広げる題材ではあるが，実際の場面で学習者が自ら利用することの難しいものと言える。

## 7. 考察

加重平均の概念は，現実の感覚的な経験にも支えられて，これまで見てきたように，数学的な性質のいくつかを合理的に説明する。その意味で学習者が数学的な問題に対して数学的モデリングを思考する際のひとつの大きな武器となる。しかしながら，モデリングの実際は，モデル化に親和性の高い対象物と方法論があってはじめて成り立つものであることも事実である。数学という学問そのものが量，図形，あるいはその他の諸関係を，その現実的な事柄を捨象して関係化するものである。それゆえ，時として数式で表された一般的な性質が現実の事象にどのようにかかわっているのかということを忘れさせてしまう。そのような理解の積み重ねからは，様々な現実の場面に於いて数学を活用する視点が生まれにくいと考える。もっと様々な場面で数学が活用されるためにも，数式や関係式の背景をどのように現実事象と結びつけておくかといった視点が授業者に求められている。また，授業者は，そういった数学の活用のための必要な土台，あるいは基礎的な部分を充分に理解した上でモデリングの方法論を用いる必要がある。今後もこうしたモデリングの分野でいくつかの有効な例が多くの研究者達によって開発され，その実践が花開くことを切に願うものである。

## 8. 参考文献

[1]　木南伸一「実験を取り入れベクトルと物理学を関連づける授業実践の工夫　－ 数学Ｂ「ベクトル」の発展学習としてー」平成２１年度　理数教育ステップアップ研修実践記録　新潟県立教育センター
http://www.nipec.nein.ed.jp/sc/risuu/h21suugaku/12kinami.pdf

[2]　バルク著（鳥居一雄・宮本敏雄訳）「重心の概念の幾何への応用」東京図書 1961