

合同式と結び目を用いた中等教育向けの数学教材の開発及び実践

酒井道宏¹, 田中利史²

空間図形の中高生向けの教材として「合同式」及び「結び目」を取り上げる。結び目は空間図形としてとらえると、それらの平面への投影図を通して、合同式を用いて、その空間図形としての違いを調べることが出来る。本論文では、合同式を用いた数学教材の開発及び実践について述べる。

<キーワード> 合同式, 結び目, 空間図形, 投影図, 彩色数, 彩色可能性

1. 序文

結び目は数学者らによって研究が盛んに行われているが、空間図形として分類するために、合同式が用いられている。本論文では、結び目の空間図形としての違いを考察することを通して、合同式を教材として用いる授業を提案する。また、本論文で紹介する授業案は平成 25 年度久留米工業高等専門学校中学生向け公開講座「あなたも一日サイエンティスト」における体験授業として実践する。

平成 21 年度に改定された高等学校学習指導要領において、数学 A に「整数の性質」の内容が新たに設けられた。数学 A で「整数の性質」は、具体的な事象の考察を通して、数学のよさを認識し、論理的に推論を進めるための学習に役立つ内容として取り上げられている。

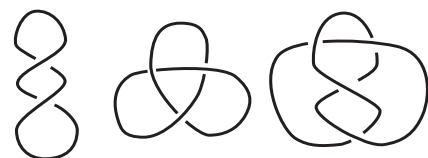
平成 20 年に告示された現行の中学校学習指導要領において、数学の各学年における学習目標として「図形について論理的に考察し表現する能力を伸ばす」ことが挙げられている。また、図形領域においては「観察、操作や実験などの活動を通して、見通しをもって作図したり図形の関係について調べたりして平面

図形についての理解を深めるとともに、論理的に考察し表現する能力を培う。」とあり、観察や操作が重要視されている。さらに、中学校学習指導要領の中学校数学科の改善の具体的事項において、「体験に基づく実感的な理解をもとに、身の回りにあるものを図形としてとらえその性質や関係などを明らかにすることや、図形の性質などを根拠を明らかにして筋道を立てて説明したり、その説明から新たな性質や関係を読み取ったりすることを重視する」とある。

以上のことより、結び目を空間図形としてとらえ、空間図形の平面への投影図を通して、合同式を用いて空間図形の性質を知ることからねらいとした授業を開発することにした。

2. 結び目について

1本のロープを用意し、自由に絡め両端を繋いだものを結び目と呼ぶことにする(図1)。



¹久留米工業高等専門学校

²岐阜大学教育学部

図 1

結び目がほどけて、平面上に平坦に置ける一つの輪となるとき、この結び目は自明であるまたはほどける結び目であるという。結び目が自明でない場合はほどけない結び目ということにする。

結び目が自明な結び目であることを示す場合は、それを実際にほどけばよい。一方で、結び目がほどけない結び目であることを示すことは容易ではない。しばらく結び目を動かしても平面上の一つの輪にならないから、ほどけない結び目であるとは言えない。このように「絡まった結び目が自明な結び目であるか、または、ほどけない結び目であるか」ということが、結び目の図形としての違いを考察する上で、重要な問題となる。結び目がほどけないことを示す場合、結び目を数理モデルとしてとらえ、数量化することが必要となる。結び目の違いを示すには、不変量という考え方をを用いる。結び目のある方法で(一意的に)定式化または数量化し、同じ結び目には同じ式や数量が対応する場合、その式や数量の違いを求めることで、結び目がほどけないかを調べることができる。このような式または数量が不変量である。本論文では、3 彩色可能という不変量を用いて、結び目の違いを考察する授業を提案する。

3. 結び目の図式

結び目の平面への投影図を考える。このとき、辺を少し移動することで、結び目が重なる点は必ず図 2 のような 2 重点のみであるとする。

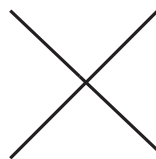


図 2

投影図の各 2 重点に対して図 3 のように、交点に結び目の線分の上下の情報を考えて投影図を描くとき、これを結び目の図式といい、そのような 2 重点のことを図式の交点という。



図 3

4. 結び目のライデマイスター移動

< 定義 > ([6])

結び目の図式において、次の変形(図 4)をライデマイスター移動と呼ぶ。

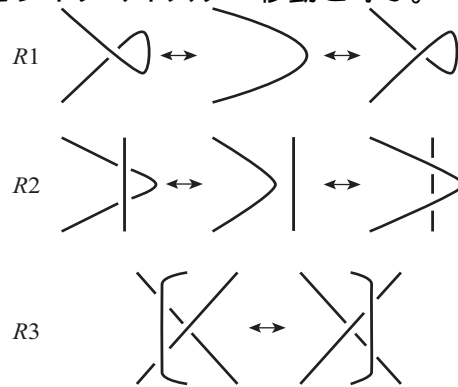


図 4

2 つの結び目の図式がライデマイスター移動の有限回の操作で移りあうとき、それらの結び目は同じであるという。

5. p -彩色数と p -彩色可能性

結び目がほどける、ほどけない、を調べるために重要となる結び目の彩色数及び彩色可能性を合同式を用いて定義する。

< 定義 >

結び目の投影図の交点の数を n とすると結び目は切れ目により n 個の曲線に分解される。この曲線のことを弧と呼ぶ。

定められた自然数 p に対して、投影図の各弧に 1 から p までの整数のうち 1 つを対応させたものを重みと呼ぶ。重みをつけた(書い

た) 投影図を重みのついた投影図と呼ぶ。

重みのついた投影図の1つの交点の周りに注目すると以下のようにになっている。(図5)

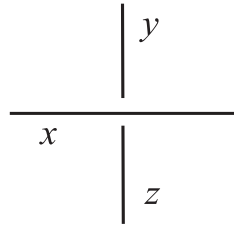


図5

ここで x, y, z は重みであり, 重みについて次の条件を考える。

$$2x \equiv y + z \pmod{p} \text{ (交点条件)}$$

すべての交点に交点条件を満たすように投影図に重みをつけることが出来た場合, その重みを適切な重みと呼び, 適切な重みのついた投影図の総数を p -彩色数と呼ぶ。さらに, 各交点において,

各弧にそれぞれ違う重みをつける

という条件をつけたとき, 条件を満たす投影図で表される結び目は p -彩色可能という。

結び目の p -彩色数及び p -彩色可能性については次のことが知られている。

< 定理 > ([5])

結び目の p -彩色数及び p -彩色可能性はライデマイスター移動で変わらない。

この定理により, p -彩色数及び p -彩色可能性は結び目の不変量であることが分かる。

< 命題 >

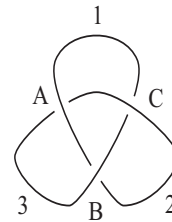
定められた自然数 p に対して, 自明な結び目は p -彩色可能でない。したがって, 自明な結び目の p -彩色数は p である。

(証明)

自明な結び目は交点のない投影図を持つ。この投影図に重みをつけるときは $1, 2, 3, \dots, p$ のいずれか一つしか使えない。よって, 自明な結び目は p -彩色可能でない。特に, 投影図への p -彩色数の条件を満たす場合の重みのつけ方は $1, 2, 3, \dots, p$ をそれぞれつけた場合の p 通りしかないため, 自明な結び目の p -彩色数は p であることが分かる。

< 例 > (三葉結び目)

以下の図式は全ての交点で, 交点条件を満たす重み付けの例である。



交点 A : $2 \times 1 \equiv 2 + 3 \pmod{3}$

交点 B : $2 \times 3 \equiv 1 + 2 \pmod{3}$

交点 C : $2 \times 2 \equiv 1 + 3 \pmod{3}$

この場合, 各交点で, 各弧に相異なる重みが付けられている。したがって, 三葉結び目は 3-彩色可能であることが分かる。また, 投影図の三つの弧に 3-彩色数の条件を満たすように重みをつける場合は, すべて同じ重みであるか, すべて異なる重みであるかのいずれかであることが分かる。したがって, 条件を満たす場合の数は, すべて重みが同じ場合の 3 通りと, すべて重みが異なる場合の 6 通りがあるため, 三葉結び目は 3-彩色数は 9 であることが分かる。

6. 授業の概要

(1) 教材について

本論文で紹介する授業の教材は, 結び目である。結び目は学習指導要領では扱われていない空間図形であるが, 結び目を題材として扱う理由を以下に示す。

1. 日常生活の中でひもを結んだり, 結ん

だひもをほどこうとすることはよくあることであり、教材が身近に感じられ数学の有用性が生徒に伝わりやすい。

2. 結び目は変形が容易であり、多様な活動ができる。
3. 最先端の研究対象であり、活発に研究がされているため、教材として多面的に利用可能である。
4. 予備知識をあまり必要としない。

(2) 授業の構成

5 節で述べたことを考察できるように授業の流れは次のように設定した。

1. (導入) 針金を用いて作成した結び目を提示し、結び目について紹介する。
2. 合同式の定義を行い、具体例を挙げる。

< 定義 > 合同式

整数 a, b 及び定められた整数 n について、整数 n で割ったときの余りが等しとき、 a, b は「 n を法として合同」といい、

$$a \equiv b \pmod{n}$$

と表す。 $a \equiv b \pmod{n}$ のとき、「 $a - b$ が n で割り切れる」ということが成立する。

3. 合同式の性質を紹介する。

$a \equiv b \pmod{n}, c \equiv d \pmod{n}$ のとき、

$$a + c \equiv b + d \pmod{n}$$

$$a - c \equiv b - d \pmod{n}$$

$$ka \equiv kb \pmod{n} \quad k \text{ は自然数}$$

が成り立つ。

< 例 >

$$4 \equiv 1 \pmod{3}, 2 \equiv 5 \pmod{3} \text{ のとき、}$$

$$\text{和} \quad 6 \equiv 6 \pmod{3}$$

$$\text{差} \quad 2 \equiv -4 \pmod{3}$$

$$\text{2倍} \quad 8 \equiv 2 \pmod{3}, 4 \equiv 10 \pmod{3}$$

4. (展開) 次の図の二つの結び目がほどけるかという問題を提示する。

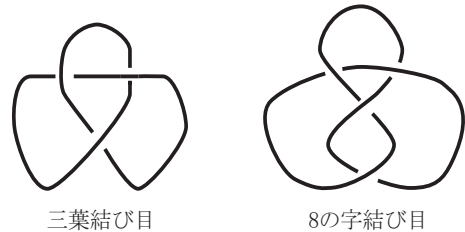


図 6

課題

これらの結び目はほどくことができるか？

5. p -彩色数及び p -彩色可能性について説明する。
6. 3-彩色可能性がライデマイスター移動で変わらないことを具体的な問題で計算してもらうことにより生徒が体験する。
7. 生徒が結び目の投影図に数字を条件を満たすように割り振る。
8. 生徒がほどける結び目が p -彩色可能でないことを確かめる。
9. 生徒が三葉結び目が 3-彩色可能であること、及び三葉結び目と 8 の字結び目の 3-彩色数がそれぞれ 9 と 3 であることを確かめる。
10. 8 の字結び目が 5-彩色可能であること、及び 5-彩色数が 5 でないことを確かめる。
11. 生徒が成果を発表する。

気付いたこと

- ・ほどける結び目は p -彩色可能でない。
- ・三葉結び目及び 8 の字結び目はほどけない。

まとめ

空間図形は投影図の特徴を調べることで、その違いを明らかにすることができる。

教師の指導・援助

- ・自己紹介。
- ・結び目を配布する。
- ・結び目の説明を行う。
- ・結び目を提示し、その投影図の描き方及び注意点を説明する。
- ・結び目の p -彩色可能性の調べ方を説明する。
- ・結び目の p -彩色可能性がライデマイスター移動で変わらないことを説明する。
- ・三葉結び目が 3-彩色可能であり、3-彩色数が 9 であることを示す。
- ・8 の字結び目が 5-彩色可能であることを示す。

この授業では実際に空間図形を作成する作業を取り入れている。数学においてこのような活動を体験することはあまりなく新鮮であり、生徒の関心を高めることができると考える。

はじめに結び目を観察しながらその投影図を考える。2つの投影図の違いを考えることを通して、結び目を平面図形としてとらえる場合の多様さを感じることができると考える。

本授業における操作活動は、結び目の図式に重みをつけることである。練習問題を用いて合同式の計算をする時間を十分にとり、生徒が 3-彩色可能性及び 3-彩色数の計算ができるようになること、及び p -彩色可能であることが結び目がほどけないことの根拠となっていることに気付くことを目標としている。

7. 実践結果

以下のとおりに実践を行った。

場所：久留米工業高等専門学校

日時：平成 25 年 7 月 24 日

参加生徒：中学生 1~3 年生 18 名

指導補助：2 名

久留米工業高等専門学校

生物応用化学科 2 年 平田有里恵

生物応用化学科 5 年 平山亜理沙

(1) 授業の流れ (教師の指導・援助)

以下のような流れで授業を行った。

(a) トポロジーの概念の簡単な説明

パワーポイントのアニメーションを利用し、円、三角形、四角形がトポロジーの意味では同じ図形であることを説明した。

(b) 結び目の概念の簡単な説明

パワーポイントのアニメーションを利用し、一重結び目から三葉結び目への変形を説明した。

(c) 3-彩色可能性の簡単な説明

自明な結び目、三葉結び目、8 の字結び目の 3-彩色可能性をパワーポイントのアニメーション機能を用いて視覚的に説明し、8 の字結び目が自明でないことの証明には別の手段が必要であると示唆した。

(d) 合同式の簡単な説明および演習

合同式の演算に慣れてもらうために、説明後に簡単な演習問題を課した。(図 7) 教員と指導補助学生で机間指導を行い、演習作業のサポートを行った。さらにそれに関連して、 n を自然数としたとき、 n^2 を 4 でわったときの余りは 0 または 1 になることの証明を宿題として課した。

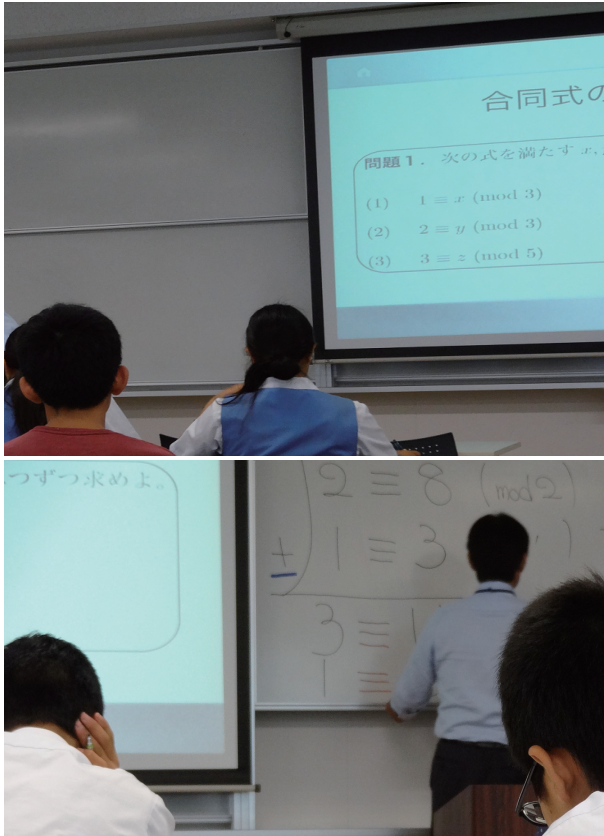


図 7

(e) 交点条件の説明および演習

具体的な結び目について、各交点が「交点条件」を満たすかどうか例示した。さらに、適切な重み付けの計算演習を課した。

(f) p -彩色数の説明および演習

具体的な結び目（自明な結び目、1 回ひねったもの）について、 p -彩色数の計算方法を例示した。さらに、自明な結び目を 2 回ひねったものの 2-彩色数および 3-彩色数の計算演習を課し、自明な結び目の p -彩色数が p であること及び、連続的に変形可能な結び目の p -彩色数は等しいことを生徒が学習した。

(g) 対偶の説明および演習

「自明な結び目のすべての p -彩色数は p である」こと対偶：「ある p での彩色数が p でない結び目は自明でない」ことを説明した。さらにそれに関連して、「 n を整数としたとき、 n^2 が偶数ならば、 n も偶数である」ことの証明を宿題として課した。

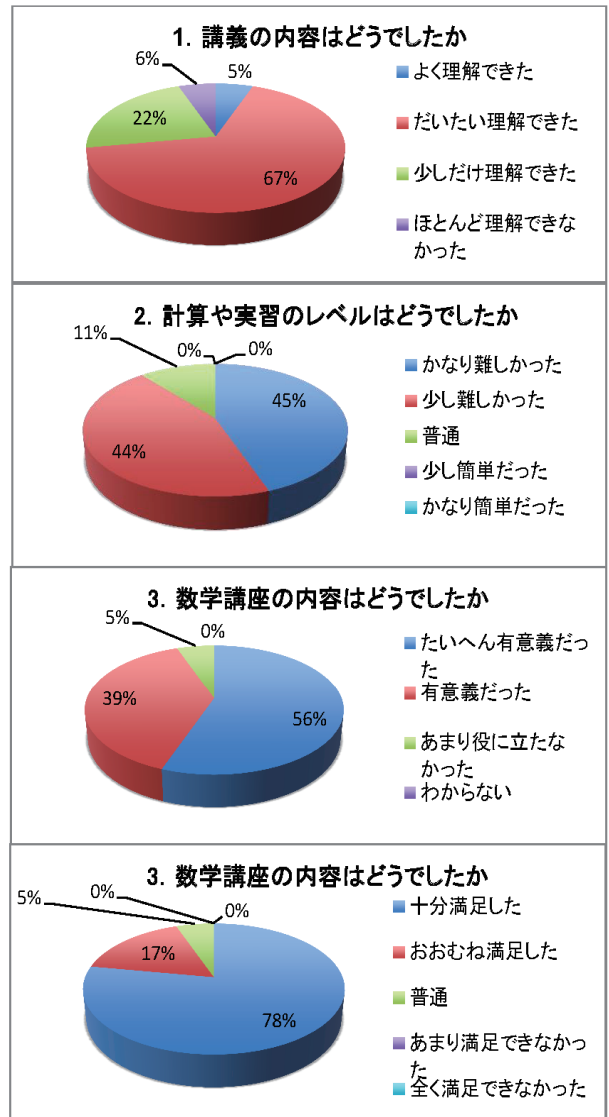
(h) 三葉結び目の 3-彩色数および 8 の字結び目の 5-彩色数の計算演習を課した。教員と指導補助学生で机間指導を行い、演習作業のサポートを行った。

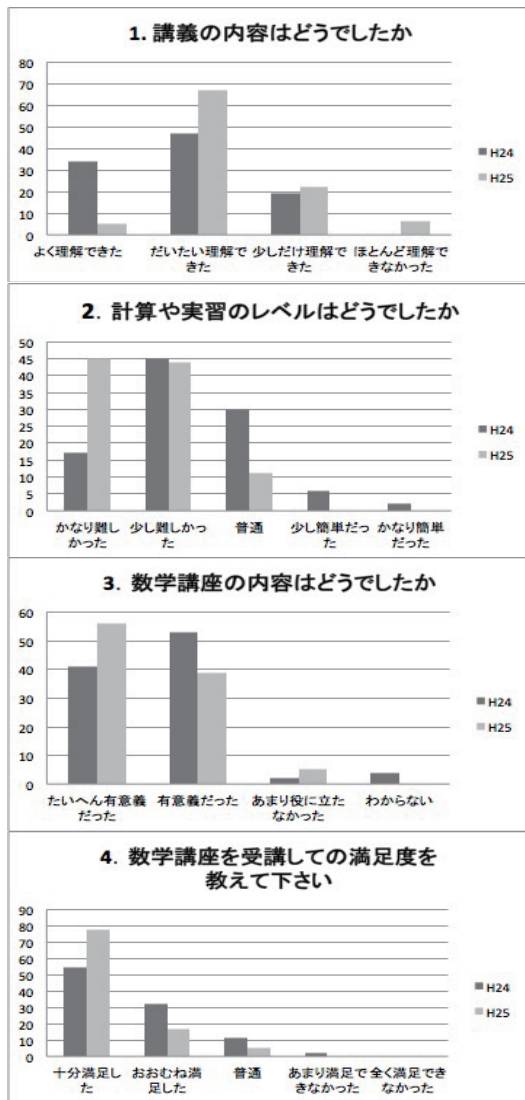
(2) 実践結果とその考察

授業後にアンケートを実施した。その回答をもとに本授業のねらいの達成度の考察を行う。

(a) アンケートの質問項目とその結果

以下、アンケートの結果及び、昨年度に 3-彩色可能性（の異なる定義）を用いた授業（参考文献 [8]）のアンケートとの比較のグラフを与える。





(b) 授業の比較及びねらいの達成度

昨年度に行った授業（参考文献 [8]）では、結び目の投影図に色を塗ることで3-彩色可能性の説明をしたが、今年は合同式の計算を通して p -彩色数を用いた結び目の分類に挑戦した。計算演習の大半が代数演算だったため、昨年度に比べ授業の難易度は高くなっている。しかし、題材が生徒にとって身近なものであったため、生徒はすぐにこの教材に興味・関心を持つことが出来た。アンケートの結果より、授業の満足度・充実度は昨年よりも向上している。

今回の授業におけるねらいである「結び目を空間図形としてとらえ、空間図形の平面へ

の投影図を通して、合同式を用いて空間図形の性質を知ること」について達成できたかどうか考察する。

授業では結び目の投影図を通して3-彩色数の計算を行い、三葉結び目がほどけないことを生徒が確認することができた。

また、8の字結び目の3-彩色数を口頭で説明し、5-彩色数の計算演習を生徒に促したが、生徒は両方計算して比較することができ、 p -彩色数の有用性及び性質を知ることができたと考える。

以上のことから、このねらいについては達成できたと考える。

9. これまでの実践例

結び目を用いた教育研究プロジェクトが2005年より5年間、大阪で行われている。（参考文献 [1], [2], [3]）特に参考文献 [2] においては3-彩色可能性を用いた高等学校での実践例がある。また、参考文献 [7][8] において3-彩色可能性に関する授業実践を行っているが、本授業では合同式を用いた p -彩色数を用いた授業の構成を行った。

10. 今後の課題

授業においては、時間の制約のため一重結び目から三葉結び目の変形をアニメーションで例示したが、結び目の模型を使って生徒に実際に変形の体験をさせた方が良かったと思える。

また、合同式の定義： $a \equiv b \pmod{p}$ を「 p で割った余りが等しい」としたが、割り算につまずいていたため、「 $a-b$ が p の倍数」と説明をした方が良かった。また、合同式を用いた交点条件とその使い方をパワーポイントで説明したが、白板で丁寧に説明した方が生徒によりよく伝わるように思える。

11. 謝辞

実践授業を行う上で指導補助をして頂いた、久留米工業高等専門学校、生物応用化学科2年 平田有里恵さんと生物応用化学科5年 平山亜理沙さんに感謝する。

12. 参考文献

- [1] 河内明夫・柳本朋子編, 2005年, 「結び目の数学教育」への導入 小学生・中学生・高校生を対象として, 21世紀COEプログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成(大阪市立大学)」における教育活動 研究報告書 第1号.
- [2] 河内明夫・柳本朋子編, 2007年, 「結び目の数学教育」への導入 小学生・中学生・高校生を対象として, 21世紀COEプログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成(大阪市立大学)」における教育活動 研究報告書 第2号.
- [3] 河内明夫・柳本朋子編, 2009年, 「結び目の数学教育」への導入 小学生・中学生・高校生を対象として, 21世紀COEプログラム「結び目を焦点とする広角度の数学拠点の形成(大阪市立大学)」における教育活動 研究報告書 第3号.
- [4] 鈴木晋一, 1991年, 結び目理論入門, サイエンス社.
- [5] 村上順, 2000年, 結び目と量子群(すうがくの風景), 朝倉書店.
- [6] 村上斉, 1990年, 結び目のはなし, 遊星社.
- [7] 宮地俊彦, 中坊滋一, 酒井道宏, 2010年, 久留米高専における中学生向け数学公開講座の取り組みと今後の課題, 久留米高専紀要第25巻第2号, pp. 19-24.
- [8] 酒井道宏, 田中利史, 中坊滋一, 2012年, 結び目をを用いた中学生向け数学教材の実践, 岐阜数学教育研究第11巻, pp. 76-83.