

最大公約数に対する感覚を豊かにする教材の提案

～2つの容器を操作しながら、作り出せる水の秘密を見つける～

諏訪紗也香¹, 山路健祐²

小学校5・6年生を対象に、2つの容器と水を操作して、作り出せる水の量は2つの容器の容量の和までの最大公約数の倍数であることを見つけるという教材を提案し、実践を行った。大きな容器、透明なカップを2つ用意し、水の流れを一定方向に決め、作り出せる水の量を具体的に調べる。この活動をさまざまな大きさの容器で行う算数的活動を通して、最大公約数に対する感覚を豊かにすることを目指した。本稿ではその実践について報告する。

<キーワード>最大公約数, 倍数, 算数的活動

1. はじめに

小学校5・6年生を対象にした企画「わくわく算数アドベンチャー」において、岐阜県大垣市スイトピアセンターで実践を行う機会を頂いた。1日2時間の企画である。

この企画の目的には、子どもの算数に対する興味・関心をより一層高めることがある。学習指導要領の改訂により「生きる力」を育むことが一層重要視されている。子ども達の身の回りの生活の中にある算数について考えることが、子どもたちの「生きる力」を育むことにつながると考えた。そこで、この実践では、小学校第5学年で扱われる最大公約数に着目した。中でも最大公約数の倍数について教材を提案し実践することにした。

今回の教材では、算数的活動を通して体験的に学び、最大公約数についての感覚を豊かにすることをねらいとし、「2つの容器と水を操作しながら、つくることができる水の量は、2つの容器の容量の和までの最大公約数の倍数であることがわかる。」ということ进行学习する。

2. 研究の目的

小学校において、平成23年4月から新学習指導要領が全面実施された。今回の算数科の改訂は、中央教育審議会の答申に示された算数科、数学科の

改善の基本方針を受けて行われた。小学校算数科の改善について、答申で述べられたことの中に、以下が記載されている。

「数と計算」の領域では、整数、小数、及び分数の意味や表し方について理解できるようにし、数についての感覚を豊かにする。

この内容を踏まえ、身近にある最大公約数に着目した教材を考えることにした。

また、小学校第5学年の学習指導要領には以下のように記載されている。

- (1) 整数の性質についての理解を深かめる。
- ア 整数は、観点を決めると偶数、奇数に類別されること。
 - イ 約数、倍数について知ること。

整数の性質とは第5学年で偶数、奇数、約数、倍数について学ぶことである。約数と倍数は小学校第6学年から移行した内容である。そのため、今回の実践で対象となる児童はすべて約数、倍数についてすでに学習しており、既習事項を深めていくことになる。

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部附属中学校

文部科学省学習指導要領解説[1]より、約数や倍数の意味を指導するとともに、ある数の約数や倍数の全体をそれぞれ一つの集合として捉えられるようにすることをねらいとしている。

これを踏まえ、中でも「最大公約数に対する感覚を豊かにする」という意味で数と計算領域に関する内容を教材として取り上げることとした。

3. 教材について

2つの公約数や公倍数の集合は、それぞれの整数の約数や倍数からなる集合の共通な要素からなるものである。例えば8の約数は{1, 2, 4, 8}であり、12の約数は{1, 2, 4, 6, 12}である。これから8と12の公約数は{1, 2, 4}となる。最大公約数は、公約数の中で最大の数であるから、4であることがわかる。また、8の倍数は{8, 16, 24, 32, …}であり、12の倍数は{12, 24, 36, 48, …}である。これから、8と12の公倍数は{24, 48, 72, …}となる。最小公倍数では公倍数の中で最小の数であるから24であることが分かる。

この約数、倍数の考え方を日常生活の場面で実際に使ってみることによって、整数の性質についての理解を深めるようにする。最大公約数や最小公倍数については具体的な場面に即して指導し、特に意味の理解を図るようにすることが大切である。

本教材は、和算の油分け算をもとにしたものであり、本論文の「はじめに」でも記したように、2つの容器と水を操作しながら、つくることのできる水の量を考察するものである。

対象が小学校5、6年生であることと、活動のねらいが、数の見方を深めることであることから、操作の仕方については、最初に設定し、あらわれた数の性質の考察に焦点を当てることにする。なお、このとき次のような性質が成り立つ。[2]

【性質】

各々の容量が、 A dL, B dLである2つの容器を使って、 $A+B$ 以下の A と B の最大公約数の倍数のすべてを表すことができる。

本時では3 dLの目盛りのついていないカップと5 dLの目盛りのついていないカップを用いて、作り出せることのできる水の量について考察していく。

水を移す動作を続けていくとつくることのできる水の量は{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}となることがわかる。ここで、3の約数は{1, 3}であり、5の約数は{1, 5}である。これから3と5の公約数は{1}となり、最大公約数も{1}となる。つくることのできる水の量は最大公約数の倍数になっていることが分かる。3 dLと5 dLの容器から作り出すことのできる水の量だけでは、この結果がわかりにくい。条件である2つの容器の容量と、結果として作り出せる数量を考察する中で、多くの児童は2つの容器の容量の和まですべての数量が作り出せるのではないかと予想する。そこで、「条件を変えても、見出した性質は成り立つだろうか」とさらに考察を促し、5 dLと4 dLの容器、6 dLと2 dLの容器など容器の大きさを変えてこの結果を追究していく。このような活動を通して、児童たちは条件である容器の容量、結果としてあらわれる数量にさらに注目し、様々な数の見方から、成り立つだろう性質を考察することができると考えた。

また、視覚的にも捉えられるよう、大きなカップと小さなカップを用意し、1つの小さな水色のタイルを1 dLの水として考えられるよう用意した。

4. 指導の展開

過程	ねらい	学 習 活 動	指 導 援 助																								
<p>入</p> <p>展開</p> <p>まとめ</p>	<p>○問題場面を把握し、目盛なしのカップの使い方がわかる。</p> <p>○ルールを理解できる。</p> <p>○カップの大きさを選択し、作ることでできる水の量を見つけることができる。</p> <p>○作ることでできる水の量から、容器の容量の最大公約数が関係していることがわかる。</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>問題</p> <p>おおきなやかんに 8 dL の水が入っています。5 dL と 3 dL のカップを使って、4 dL ずつに分けることができますでしょうか。ただし 5 dL と 3 dL のカップに目盛はついていません。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・予想をたてる。 ・前で実際に行ってみる。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>ルール確認</p> <p>① まず 5 dL のカップを満タンにする。(5 dL のカップがからのときに限る。)</p> <p>② 5 dL のカップから 3 dL のカップへ水をうつすことはできる。(3 dL のカップが満タンになるようにする。)</p> <p>③ 3 dL のカップが満タンになった時に限り、やかんに戻すことができる。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・操作の様子は表に書き込んでいく <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 2px;">5 dL のカップ (dL)</td> <td style="padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">4</td> <td style="padding: 2px;">…</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">3 dL のカップ (dL)</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">3</td> <td style="padding: 2px;">0</td> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">3</td> <td style="padding: 2px;">…</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">2 つのカップの合計</td> <td style="padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">5</td> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">2</td> <td style="padding: 2px;">7</td> <td style="padding: 2px;">7</td> <td style="padding: 2px;">…</td> </tr> </table> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>課題 いろいろな大きさのカップを使って、作ることでできる水の量の秘密を見つけよう。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・各グループで下の図を参考に、カップの大きさを決め、作ることでできる水の量について調べる。 <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin-bottom: 10px; display: flex; justify-content: space-around;"> <ul style="list-style-type: none"> ・5 dL と 3 dL のカップ ・6 dL と 2 dL のカップ ・5 dL と 4 dL のカップ ・6 dL と 3 dL のカップ </div> <ul style="list-style-type: none"> ・ほかの班と作ることでできる水の量の秘密を交流する。 ・作ることでできる水の量から、容器の容量の最大公約数が関係していることをみつける。 ・6 dL と 4 dL のカップ、9 dL と 6 dL のカップで、確かめてみる。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>まとめ 作ることでできる水の量は、2 つのカップの容量の最大公約数の倍数になっている。また、その数は 2 つのカップの容量の和までになっている。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・自分たちで容器の大きさを決め、確かめの問題をする。 	5 dL のカップ (dL)	5	2	2	0	5	4	…	3 dL のカップ (dL)	0	3	0	2	2	3	…	2 つのカップの合計	5	5	2	2	7	7	…	<ul style="list-style-type: none"> ・やかん、カップ、水を用意し、視覚でも捉えやすくする。 ・ルールを最初に提示するが、実際に操作を行いながら確認する。このことで、水の流れが一定方向であることを理解させる。 ・水を操作する、表に書き込むという役割を児童に分担し、ルールや表の書き込み方になれるようにする。 ・グループごとに実験するときは、水を使わず、小さいタイル 1 枚を 1 dL として操作する。 ・2 つのグループで交流して、それぞれの実験結果からわかったことや、新しく疑問に思ったことを出し合い深めるようにする。 ・自分なりに、実験結果をまとめてみる。
5 dL のカップ (dL)	5	2	2	0	5	4	…																				
3 dL のカップ (dL)	0	3	0	2	2	3	…																				
2 つのカップの合計	5	5	2	2	7	7	…																				

いろいろな大きさのカップを使って、作ることのできる水の量の秘密を見つけよう！ NO.1

名前 ()

_____ d L																	
_____ d L																	
合計 d L																	

_____ d L																	
_____ d L																	
合計 d L																	

_____ dL																	
_____ dL																	
合計 dL																	

作りだせる水の量をまとめてみよう NO.2

名前

()

カップの大きさ	作りだせる水の量
5dLのカップと 3dLのカップ	
5dLのカップと 4dLのカップ	
6dLのカップと 2dLのカップ	
6dLのカップと 3dLのカップ	
6dLのカップと 4dLのカップ	
9dLのカップと 6dLのカップ	
dLのカップと dLのカップ	
dLのカップと dLのカップ	

ふりかえりシート

NO.3

名前 ()

〈NO.2のシートを見ながら、自分のグループでやってみて気付いたことを書こう！〉

〈他のグループの意見を聞いて気付いたことをまとめてみよう！〉

5.子ども達の活動の様子

授業の導入において、ルールの確認（水は一定方向にしか流れないこと）と4 dLの水が作り出せるかどうかの考察を行った。カップやタイルの移動を黒板前で見せながら、水の移動を4 dLが作り出せるところまで黒板の表に書き込んでいった。

5 (dL)	5	2	2	0	5	4	
3 (dL)	0	3	0	2	2	3	
合計	5	5	2	2	7	7	

繰り返し説明をすることで児童全員がルールを理解できた。ルール確認後、各グループにカップやタイルの教材を1~2個配りNO.1のプリントに水の移動を表に書きこんでいった。

5 (dL)	5	2	2	0	5	4
3 (dL)	0	3	0	2	2	3
合計	5	5	2	2	7	7

4	1	1	0	5	3	3	0	0
0	3	0	1	1	3	0	3	0
4	4	1	1	6	6	3	3	0

5 dL と 3dL の容器を使った考察だけでは最大公約数というキーワードは出て来なかったの、他にも様々な大きさの容器を使った考察を行った。初めは、偶数や奇数などのキーワードが挙げられたが、操作や、考察を行っていく中で、最大公約数の倍数というキーワードが児童数人から出てきた。どんなカップの大きさを考察をしてみたかということ进行交流しながら、最大公約数というキーワードをもとにつくることのできる水の量は最大公約数の倍数であるとほとんどの生徒が気づくことができた。

また、様々な大きさの容器を操作していく中で、ほとんどの児童がカップやタイルの教材を使わず、

表のみで考察を行うことができた。考察の中で、児童の中から水を移動させる動作の回数はカップの大きさに関わらず、奇数回で終わるという意見が出てきた。これは、表に水の移動の様子を書き込んでいったときに、つくり出せる水の量は2回ずつ現れ、また、全てのカップの水が0となる回数が1回現れる。このことから、水をやかんにもどし終わったとき、水を移動させる回数は(つくり出せる水の量の数) $\times 2+1$ となっているということである。

授業の終末でとったアンケートは以下のとおりである。

- ・最大公約数がヒントになった。
- ・2つのカップで作り出せる水の量は2つのカップの最大公約数の倍数になっている。
- ・2つとも大きなカップだからといって、作り出せる水の量は多くない。
- ・水を移動させる回数はどんなカップの時でも奇数回となる。
- ・水を移動させる回数は(つくり出せる水の量) $\times 2+1$ となっている。
- ・水をカップに入れることは、身近にあることなので、これからたくさん場所で取り入れたい。

これらのことから、つくり出せる水の量は最大公約数の倍数になっているということだけでなく、表にあらわれる数量関係を変化の様子から考察し、水を移動させる回数は(作り出せる水の量の数) $\times 2+1$ となっていることにも気づけたということが分かる。また、水をカップで計ることは身近なことであることから、今後に生かしていきたいという姿勢も見られた。

また、「集中して取り組めた。」「おもしろかった」という意見が多く、子どもたちの興味・関心が高かった。

6.授業のまとめと今後の課題

2 時間という限られた時間の中で今回の授業を実施したが、全体を通してとても有意義な時間になった。今回の実践は既習事項であったことから、すべての児童がまとめまで達成することができた。活動に熱心に取り組む児童が多く、手を休めることなく、カップの大きさを変えて考察に取り組む児童ばかりであった。最大公約数というキーワードをこちらから提示しなくても、児童の力で導くことができた。これは、最大公約数という数の見方が児童に身につけている証拠である。さらに、カップの容器の大きさを変えて考察をしていくときに、ほとんどの児童が途中から具体物の操作を行うことなく表を埋めていくことができたことから、具体化から抽象化が行えているということがわかる。また、今回、水を移動させる回数は（作り出せる水の数） $\times 2 + 1$ となることが児童の追究から導くことができたのは想定外の範囲外のものであった。児童たちは表を数の単なる数の羅列ととらえることなく表にあらわれる数量を変化や対応の見方から考察することができていた。今回の内

容は既習事項であったため、難易度は高くなく、ほとんどの児童が授業の中盤で規則性を見出すことができており、カップの大きさを変えて、まとめを確認していく児童と新たな規則性を探している児童とに分かれていた。このことから、この実践ではある程度の容器の大きさでまとめが確認できたところで、新たな規則性や特徴を見つけていくと、より児童の学習が深まっていくと考える。

7.終わりに

今回の授業を通して身近なところに数学は隠れており、児童たちが数に興味を持ち、今後の学習につなげていってくれれば幸いである。

引用・参考文献

- [1] 文部科学省，平成 20 年 8 月，小学校学習指導要領解説―算数編，教育出版株式会社
- [2] 山路健祐，2004 年，算数・数学教育における和算の活用，pp122-130，岐阜大学大学院教育学研究科修士論文