

うなりを題材とする物理学と関連した教材の開発及び実践

堀田卓宏¹, 愛木豊彦²

高等学校学習指導要領第一章総則において、「各教科・科目等の相互関連を図ること」が指導計画の作成にあたる配慮すべき事項とされている。また、教育課程の実施等にあたって配慮すべき事項に「情報手段に加え視聴覚教材や教育機器などの教材・教具の適切な活用を図ること」と記されている。さらに「教育の情報化に関する手引き」においても、教科活動における ICT 活用の重要性と、その効果が述べられている。そこで「音と周波数の関係」を題材とし、数学と物理が相互に関連した教材を開発し、その授業の中で情報機器を用いることにした。本論文でその教材の内容と授業実践の概要と結果について報告する。

<キーワード>三角関数, 和積の公式, 周期, 周波数, うなり

1. はじめに

平成 21 年に改訂された高等学校学習指導要領総則 [1] の「指導計画の作成にあたって配慮すべき事項」に「(1) 各教科・科目等について相互の関連を図り、発展的、系統的な指導ができるようにすること。」とある。数学編第 3 款においては「各科目を履修させるに当たっては、当該科目や他の科目の内容及び理科, 情報科, 家庭科等の内容を踏まえ、相互の関連を図るとともに、学習内容の系統性に留意すること。」とある。

また、「教育の情報化に関する手引き」[2] においては、各教科等の指導における授業者による ICT 活用及び学習者による ICT 活用のいずれについても充実が求められている。これは、効果的に ICT 機器を扱うことにより、効果的・効率的な授業を行うことができ、それが確かな学力の育成につながるからである。

そこで、本論文では理科物理 I の内容である音と周波数に関連する現象であるうなりを取り上げ、この現象の解明に三角関数が用いられることを題材とする教材の開発を行った。またその教材の中で ICT 機器として、コンピュー

タを用いることを考えた。本教材では、「Wave-Genie」[3] という、指定した周波数の音とその波形を表示するフリーソフトと、「GRAPES」[4] という、関数グラフ表示のフリーソフトを用いている。

2. 教材について

2.1. 題材の概要

今回の授業実践で選んだ題材は「異なる 2 つの周波数の音を同時に流したときに生じる音」についてである。2 つの音を同時に流し、周波数の差を小さくしていくと、最初は一定の高さの音に聞こえるが、徐々に音の強弱が変化する奇異な感じのする音が聞こえてくる。この現象は「うなり」と呼ばれている。本論文で紹介する教材の題材はこの現象が生じる理由を三角関数を用いて説明することである。

2.2. 教材に関して

音とは、物質中を伝わる波である。また、音の要素は、音程、音量、音色の 3 つである。音程は周波数(もしくは周期)で決まり、音量は振幅、音色は音の波形で決まる。ゆえに周波数を決めると、それに対応した音程が定まる。

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²日本女子大学理学部

また、音は物質中を伝わる波であるから、その波形は三角関数を用いて次のように表わすことができる。

まず、周波数が $f[\text{Hz}]$ の音を表わす波形の式を $y = \sin kx$ とする。周期は周波数の逆数なので、今の場合、周期は $1/f(\text{s})$ と表される。従って、三角関数 $y = \sin kx$ の周期が $\frac{2\pi}{k}$ なので、 $\frac{1}{f} = \frac{2\pi}{k}$ となる。従って、 $k = 2\pi f$ となるので、周波数が $f[\text{Hz}]$ の音を表わす波形の式は $y = \sin 2\pi fx$ である。

ここで、物理学から2つの音を同時に流した音を表わす波形の式は、それぞれの音を表わす波形の式のと和で表わされることが分かっている。従って、2つの異なる音の周波数を $A[\text{Hz}]$, $B[\text{Hz}]$ (ただし、 $A > B$ とする。) とすると、それぞれの音を表わす波形の式は、

$$y = \sin 2\pi Ax, y = \sin 2\pi Bx$$

なので、音を同時に流した際に得られる音の波形の式は

$$y = \sin 2\pi Ax + \sin 2\pi Bx$$

である。さらに、この式を三角関数の和積の公式を用いて変形すると、

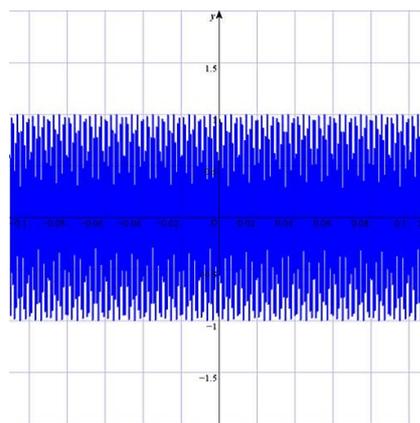
$$y = 2 \sin(A+B)\pi x \times \cos(A-B)\pi x \quad (1)$$

となる。ここで、 $\sin(A+B)\pi x$ と $\cos(A-B)\pi x$ のそれぞれの周期は $\frac{2}{A+B}$ と $\frac{2}{A-B}$ であり、

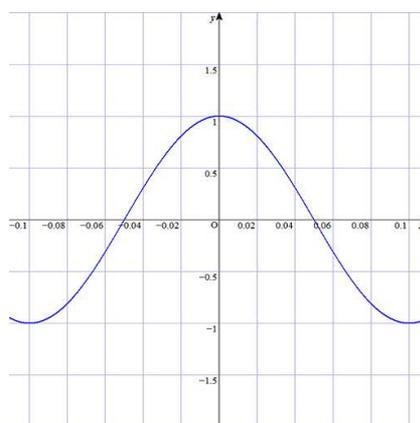
$$\frac{2}{A+B} < \frac{2}{A-B}$$

となる。

例えば、 $A = 1000$, $B = 990$ のとき、 $\sin(A+B)\pi x$ と $\cos(A-B)\pi x$ のグラフは、それぞれ次のグラフ1とグラフ2のようになる。

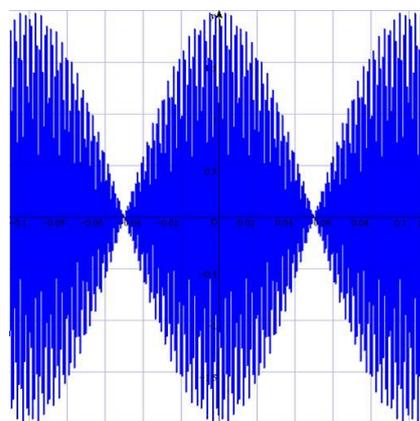


(グラフ1 : $\sin(A+B)\pi x = \sin 1990\pi x$)



(グラフ2 : $\cos(A-B)\pi x = \cos 10\pi x$)

これらのグラフから、 $\cos(A-B)\pi x$ の1周期の時間で、 $\sin(A+B)\pi x$ はかなり多くの回数で振動することがわかる。従って、(1)を用いると、2つの音を同時に流した音の波形のグラフはグラフ3のようになることが説明できる。



(グラフ3)

ここで、 $\cos(A-B)\pi x$ の周期は $\frac{2}{A-B}$ なので、値が0になる間隔は $\frac{1}{A-B}$ である。従って、 $A[\text{Hz}]$ と $B[\text{Hz}]$ の音を同時に流した場合、 $\frac{1}{A-B}$ の間隔で音が途切れる。さらに、 A と B の値が近ければ近いほど、 $\frac{1}{A-B}$ の値は大きくなり、音の途切れる間隔が広がるため、奇異な感じの音に聞こえる。これがうなりの生じる原因であり、 $\frac{1}{A-B}$ をうなりの周期と呼ぶ。ここで、 $\frac{1}{A-B}$ は $\sin 2\pi Ax + \sin 2\pi Bx$ の周期とは限らないので、「うなりの周期」という表現を用いている。

以上より、うなりという題材には次の特徴があることが分かった。

i) うなりという現象が生じる理由は、三角関数の和積の公式や三角関数の周期やグラフを用いて説明できる。

ii) うなりは、同時に流す2つの音の周波数が近いほど生じやすい。

この2つの特徴から、うなりを題材とする授業を行うことを考えた。その理由を述べる。

i) について

三角関数の和積の公式や周期などを自然の現象の解明に用いるので、高等学校での学習内容の有用性を伝えることができる。そして、これが学習意欲の向上につながると考えた。また、1節で述べた教科の相互関係を示すことができるので、学習指導要領で掲げられていることが、達成できると考える。

ii) について

水彩絵の具で色彩の近い赤色と橙色を混ぜると、両方の色彩と似た暖色となる。このように、水彩絵の具では近い色同士を混ぜると近い色に見えるのに対し、音の場合は周波数が近いほど、うなりの周期が大きくなり、奇異な音に聞こえ、近い音に聞こえないというのは不思議なことである。

従って、この点を説明すれば、生徒の興味

を引けるものと考えられる。

次節でうなりを題材とする高校生用の授業の展開について述べる。

3. 授業展開

1) 導入

本時において音と周波数を扱っていくことを、「Wave Gene」を用いた以下のクイズによって説明する。

クイズの内容は「2つの音を同時に流す。その組はA:1000[Hz]と950[Hz]、B:1000[Hz]と500[Hz]である。後に流れるのはAとBのどちらか」というものである。実際には、Aを後に流した。

その後、同時に流す音の周波数が近いほど奇異に聞こえることに着目し、いくつかの周波数の組の2つの音を同時に流し、周波数の差が小さくなると「音の途切れる間隔が広がる」ことを実感させる。

なお、ここでは「Wave Gene」の音が流れているときの波形は提示せず、聞こえた音だけに着目させていく。

2) 展開①

三角関数の周波数と周期の関係（逆数になること）を確認する。なお、これは既習内容である。そして、周波数が $f[\text{Hz}]$ の音は三角関数を用いて

$$y = \sin 2\pi fx$$

と表わせるとまとめる。

3) 展開②

「GRAPES」を用いたグラフの作成方法を説明する。これは次の展開③においてこのソフトを用いた活動を行うための準備である。

まず、クラスを3人1組のグループに分け、各グループにノートパソコン1台と大学生の補助員を配置した。そして、使用方法をまとめたプリントを配布し、問題(1)(文末資料学習指導案を参照)に取り組みせながら「GRAPES」の使い方を指導する。

4) 展開③

ここでの目的は、2つの異なった周波数の音を同時に流す音を表わすグラフは、もとの2つの音を表わす三角関数の和で表わされることを理解することである。そのために、「WaveGene」に現れる波形と「GRAPES」でかいたグラフを比較する。

ここで、「WaveGene」は流れている音を表わすグラフも表示することを説明する。そして、もとの音を表わす三角関数の和のグラフを「GRAPES」でかき、これと「WaveGene」のグラフとを比較し、一致することを確認する。調べる波形はクイズでを使用した2組の音であり、「WaveGene」の波形は事前に学習プリントに印刷しておく。

5) 展開④

周波数の差を小さくしていくと、グラフに表われる塊が横方向に大きくなることに気づかせ、それが課題における「合わせた音の途切れる間隔が広がる」ことと対応していることをおさえる。

ここで、「ゼロ点」という言葉を定義する。ゼロ点とは第2節のグラフ3における、振幅の揺れ幅が0の点である。

物理学においては振幅の揺れ幅が0の点のことを「節」という。しかし、今回着目させたいことは、グラフが x 軸に集中している点と点の幅が2つの音の周波数の差によって変化するということである。そのため、「節」という言葉を用いると着目させたい点以外の振幅が0の点も含むことになるため、正確な表現とはならない。そこで今回は、物理用語の「節」という語ではなく、独自の語である「ゼロ点」という表現を用いることとした。

よって、上記のグラフの塊が横方向に大きくなるということは、ゼロ点の間隔が広がるということである。ゆえに、課題における「途切れる音の間隔が広がる」ということと、「ゼロ点の間隔が広がる」ことがともに周波数の差を小さくしていった際に生じるこ

とであるので、「ゼロ点の間隔が広がる」ことを説明できれば、「途切れる音の間隔が広がる」ことを説明できることをおさえる。

6) まとめ

周波数の差が小さくなると、ゼロ点の間隔が広がっていくということを、三角関数の和積の公式を用いて説明する。

4. 実践結果

4.1 授業実践

この教材を以下のとおり実践した。

日時 :平成23年12月16日(金)

第2・3校時

題材名:「音合体」

場所 :名城大学付属高校

対象 :高校2年生徒(28名)

補助員:大学生・大学院生計9名

4.2 授業のねらい

(a)2つの異なる音を同時に流したときの、「途切れる間隔が広がる」ことと「ゼロ点の間隔が広がる」ことが同値であることがわかる。

(b)数学が、他教科とも関連のある教科であることが実感できる。

(c)コンピュータを適切に用いて、調べたり説明したりすることができる。

5. 考察

5.1 アンケート結果

授業後にアンケートを実施した。その結果の一部を紹介する。

① 普段の数学の勉強が役立つと思えましたか。

| | |
|--------------|-----|
| 思う | 13人 |
| どちらかといえば思う | 13人 |
| どちらかといえば思わない | 2人 |
| 思わない | 0人 |

② 問題5を自分の力で説明するところまでできましたか。

| | |
|--------------|-----|
| 自力で最後までできた | 3人 |
| 半分くらいまでできた | 18人 |
| 全く手が付けられなかった | 7人 |

③ 2時間通しての課題の「周波数の差が小さくなると、合わせた音の途切れる間隔が広がる」ことは、納得できましたか。

| | |
|------------------|-----|
| 納得できた | 17人 |
| どちらかといえば納得できた | 9人 |
| どちらかといえば納得できなかった | 0人 |
| 納得できなかった | 2人 |

④ この授業は面白かったですか。

| | |
|-----------------|-----|
| 面白かった | 14人 |
| どちらかといえば面白かった | 11人 |
| どちらかといえば面白くなかった | 1人 |
| 面白くなかった | 2人 |

(授業全体に関する感想の中より抜粋)

- 違う周波数の音を組み合わせると、全然違う音が作り出されるところがすごく面白かった。
- 音が関数で表わせて、そのグラフの形がすごいと思いました。だんだん幅が大きくなったり、小さくなったり、すごいと思いました。
- 音波について興味が持てた。
- 音という身近なものが全て数式に置き換えられるのは興味をもてた。合成波の比較もきれいな法則性があって面白かった。
- 音についての理解が深まったと思う。これからの物理の授業に生かせそうだ。
- 具体的なものをイメージして、数学を学ぶと、難しいと思ったような内容でも、スッと頭に入るので、よい授業だったと思いました。
- いつもの数学の授業が生活に役立つことがわかってとてもおもしろかったです。
- 音が関数に関係しているとは思わなかった。

(コンピュータの使用に関する感想の抜粋)

- 実際に音を聞くことで、頭に入りやすかったです。
- PCを使ってグラフを作るのが面白かったです。
- パソコンソフトを利用したため、グラフがしっかり見ることができて理解が深まったと思う。自分で数式を入力してその数式のグラフがちゃんと見れるところがよかった。

5.2 ねらいに対する考察

授業実践の様子やアンケート、感想から授業のねらいについて考察する。

(a) について

質問の③の回答を見ると、課題が納得できた・どちらかといえば納得できたという生徒が26名である。しかし授業中では、「途切れる間隔が広がる」ことを説明するために「ゼロ点の間隔が広がる」ことを説明するということを授業者が示している。ゆえに、学習者が自ら気が付いたというものではないが、最終的には理解できていたと考える。

しかし、感想の中には

- 最後の説明をしっかりと聞きたかった。
- 最初の方を早くやって、最後の問題をしっかりとゆっくり解説するともっとわかりやすかったと思います。

という感想があった。この点に関しては授業者が時間配分を失敗したため、十分な説明が行えなかったことが反省点である。

(b) について この点に関しては、授業全体に関する感想の中に、物理学との関連について書いている生徒がいた。また、音という事象が、数学の関数を用いて表わすことができるということに対し、興味を持っている生徒もいた。ゆえに (b) に関しては、おおむね達成できたのではないかと考える。

(c) について

感想にもあるように、コンピュータを授業で使用したことに対しては、より分かりやすくなった、面白い、といった感想が見られる。また、授業中3人に1台ノートパソコンを用意した。そのため、問題に対して、グラフを作成し、それぞれのグラフを比べたり、そのことに対してお互いに話し合ったりと活発だった。よって、(c)はおおむね達成できたのではないかと考える。

5.3 ICT 機器の活用について

授業の様子を振り返ると、ICT 機器の利用は生徒に具体的なイメージを持たせることに大いに役に立ったと考える。また、授業の間の休み時間に、自由にソフトを使用していたところ、市松模様のグラフを作成していたり、周期を調節し、画面を塗りつぶしていたりしている班もあった。これらの生徒の感想や様子から、授業における適切な情報機器の活用には、生徒の興味関心を引き、また自主的な活動を促せることが分かった。

6. 今後の課題

今回の授業実践における課題は以下の2点である。

1点目は、適切な時間配分と、授業全体の流れについてである。5.2節で記述しているが、

後半の説明に十分な時間を割くことができなかった。また、その説明も時間の関係で授業者の主導で行ったため、生徒の考えが十分に反映されるものではなかった。そこで、導入や展開での授業の流れを見直す必要がある。

2点目は、適切な問題設定と、それらに対する指導・支援に関してである。アンケートの②を見ると、最後の問題を自力で行えた生徒はわずか3人である。また、今回の授業実践においては生徒3人に対して補助員が1名着く形式であった。1点目の時間に関するものもあるが、生徒に1つの課題をじっくりと考えることの面白さを実感させながらも、最後には自力で説明ができるような授業の流れや指導・支援が必要だったのではないかと考える。

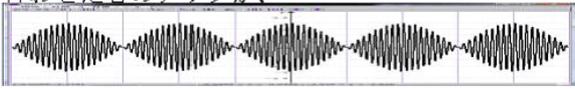
引用文献

- [1] 文部科学省, 平成21年, 高等学校学習指導要領.
- [2] 文部科学省, 平成22年10月, 教育の情報化に関する手引き
- [3] WaveGene
<http://www.ne.jp/asahi/fa/efu/soft/wg/wg.html>
- [4] GRAPES 大阪教育大学 <http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/tomodak/grapes/volume.html>

資料, 学習指導案(1 時間目)

| | ねらい | 学習活動 | 指導(◇)と援助(◆) | | |
|---|--|--|---|--|---|
| 導入 | <p>○異なる周波数の音を同時に流すと、変わった音が生じることに興味を持つ。</p> <p>○2 つの音の周波数を近づけると、音が途切れる間隔が広くなることに気づく。</p> | <p>1.3 つの異なる周波数の音を聞いた後に、これらを用いたクイズを行い、本時の授業で音と周波数について考えていくことを知る。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>クイズ 2 つの音を同時に流す。 その組は A:1000Hz と 950Hz の組と B:1000Hz と 500Hz の組である。 後に流れた組はどちらか。</p> </div> <p>2.異なる周波数の音を同時に流すと、震えるような変わった音が生じることに気づく。</p> <p>3.同時に流す音の周波数を近づけていくと、音が途切れるように聞こえることに気づく。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>問題 1 異なる 2 つの音を同時に流したとき、2 つの音の周波数を近づけると、合わせた音にどのような変化があるだろうか。 ・周波数を近づけると、より震えるような音が聞こえる。 ・音が途切れるように聞こえる。</p> </div> | <p>◇クイズで扱う 3 つの音を 1 つずつ聞き、周波数の値が低くなるにつれて、音が低くなることを指導する。周波数は音の高さを表わす値で単位は (Hz) であることをおさえる。</p> <p>◇クイズにおける A と B の違いについて、音の高さの違いだけではなく、震えるように聞こえることに着目できるように、聞こえる音を言葉で表わす。</p> | | |
| 展開 | <p>○音というものは物質中を伝わる波であることから、波は三角関数を用いて表わすことができる。</p> <p>○既習の三角関数の内容を思い出すとともに、周期と数は数の関係や、$f(\text{Hz})$ の音を三角関数で表わしたときの式を一般化する。</p> | <p>4.2 時間の授業を通しての見通しを持つ。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>2 時間を通しての課題 2 つの音の周波数の差が小さくなると、合わせた音の途切れる間隔が広くなることを数式を用いて説明しよう。</p> </div> <p>5.音の周波数・周期・三角関数について練習問題を含めながら指導する。</p> <p>6.グラフ作成ソフト (GRAPES) に慣れる。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>問題 2 グラフ作成ソフトを用いて、次のグラフを作成しよう。</p> <p>(1) $y = x + 2$</p> <p>(2) $y = x^2 + 4x + 4$</p> <p>(3) $y = \sin 2\pi x$</p> <p>(4) $y = \sin 4\pi x$</p> </div> | <p>◇今後の授業の流れを大まかに説明する。</p> <p>◇三角関数と周期の関係・周期と周波数の関係・周波数が $f(\text{Hz})$ の音は三角関数で $y = \sin 2\pi f x$ と表わすことができることを指導する。</p> <p>◆練習問題で考えの進まない生徒に対しては、学習プリントの練習問題の前に書かれている内容と関連付けて支援を行う。</p> <p>◇グラフ作成ソフトに関しては、問題の(1)を用いて作成方法を指導する。</p> <p>◆ソフトの扱いに関するマニュアルを配布する。また、班に大学生が 1 人付き、支援を行う。</p> | | |
| まとめ | <p>○音を同時に流すということが、それぞれの音を足し合わせているということを、グラフ作成ソフトで確認していくことを知る。</p> | <p>7.次の時間の見通しを持つ。</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 50%; padding: 5px;">1000(Hz)の音を三角関数で表わすと, $\sin 2000\pi x$</td> <td style="width: 50%; padding: 5px;">500(Hz)の音を三角関数で表わすと, $\sin 1000\pi x$</td> </tr> </table> <p>音を同時に流すということは、それぞれの音を足し合わせることである。ゆえに、音を同時に流しているときの波を表わす式は、 $y = \sin 2000\pi x + \sin 1000\pi x$ となる。</p> <p>このことを、次の時間にグラフ作成ソフトと、音を流しているときの波形とを比べることで正しいことを確かめる。</p> | 1000(Hz)の音を三角関数で表わすと, $\sin 2000\pi x$ | 500(Hz)の音を三角関数で表わすと, $\sin 1000\pi x$ | <p>◇1000(Hz)と 500(Hz)の音を同時に流した場合を例にとり、得られる波のグラフがどのようにできているのか説明する。</p> |
| 1000(Hz)の音を三角関数で表わすと, $\sin 2000\pi x$ | 500(Hz)の音を三角関数で表わすと, $\sin 1000\pi x$ | | | | |

資料，学習指導案(2時間目)

| | ねらい | 学習活動 | 指導(◇)と援助(◆) |
|-----|---|--|--|
| 導入 | ○音を同時に流して得られる波のグラフが，三角関数の和で得られることを確かめる。 | 8.音を同時流したときに得られる波が，三角関数の和で表わされることを確かめる。 問題3 グラフ作成ソフトを用いて，合わせた音のグラフが三角関数の和で表わされることを確かめよう。 | ◇グラフ作成ソフトで作成する関数を示し，作成したグラフと音が流れているときの波を比べ，三角関数の和で表わされることを確かめる ◆グラフ作成ソフトのx軸の領域を変更する。 ($-0.01 \leq x \leq 0.01$) |
| 展開 | ○課題の「音の途切れる間隔が広くなる」と、「ゼロ点の間隔が広くなる」ことが同じであることを理解できる。 | 9.周波数を近づけると，合わせた音のグラフはどのように変化するのかを調べる。 問題4 周波数を近づけると，合わせた音を表わすグラフはどのように変化するだろうか。共通することと変化していくことを調べよう。 (共通すること) ・グラフに『唇型』の塊が見られる。 ・振幅が同じ (変化していくこと) ・周波数が近づくにつれて，『唇型』の幅が広がる。 | ◆グラフ作成ソフトのx軸の領域を変更する。 ($-1.2 \leq x \leq 1.2$) ◇表現を統一するため，得られるグラフの塊の橋を「ゼロ点」と名前を定義する。 ◇振幅が音の大きさを表わしていることから，ゼロ点は音が生じていない点であり，音が途切れている点であることを指導する。 |
| まとめ | ○周波数を近づけると，ゼロ点の間隔が広くなることを数式を用いて説明できる。 | 10.数式を用いて説明を行う。 問題5 周波数が A(Hz)と B(Hz)の音を同時に流したとき，合わせた音のグラフが，  となることを数式を用いて説明しよう。ただし，周波数は $A(\text{Hz}) > B(\text{Hz})$ とする。 次に周波数の差が小さくなると，ゼロ点の間隔が広くなることを数式を用いて説明しよう。 11.アンケート記入 | ◆ヒントプリントは問題を提示したのちに，提示する。 ◇時間があれば生徒に説明を行ってもらおうが，時間がなければ，授業者が全体で説明を行う。 |