岐阜数学教育研究
2012， Vol. 11， 143-153

飛行機を題材とした高校生用の教材の開発と実践

牧田慎也[1]，愛木豊彦[2]，山田雅博[3]

岐阜県教育委員会主催の高校数学セミナーにおいて実践の機会をいただき，主に高校1，2年生を対象とした授業を行った。題材は，3次元領域における線形計画法であり，セミナーでは，その問題を解決するために必要な内容を系統的に学習していく。この内容は高校数学の発展であるが，活動を取り入れることで，数学の有用性を実感できるような展開にした。本稿では，その題材の詳細と実践の結果を報告する。
＜キーワード＞ 線形計画法，座標空間，平面の方程式

1. はじめに

岐阜県教育委員会の主催する平成24年度高校数学セミナーにおいて実践の機会をいただいた。このセミナーの教材を開発するにあたって，学校で学んだ数学を活用し，それを発展させた内容にしたいと考えた。そして，その活動を通して，参加した生徒たちが学校で学ぶ数学は社会でどのように役立っているかという数学の有用性を実感できることをねらいとした。

2．題材について

セミナーで扱う題材は，サーティーが[1]で挙げた次のものである。

> それぞれタンク容量1000ガロンで，1ガロンにつき1マイル飛行できる飛行機が3機，ある基地を同時に出発した。このうち1機を遠方のある基地に送り，そこに着陸させたい。その他の2機はこの1機に（および相互に）自分の積んでいる燃料を補給するが，残りの燃料でもとの基地へ安全に帰着せねばならない。地上での試験運転，離陸，および着陸と予備用には燃料は用いないものと仮定する。また1ガロン当り1マイルという割合は飛行中つねに成立つものと仮定する。さらにある飛行機から他の飛行機への燃料補給は，とくに時間の損失なしに行われると仮定する。
>
> (a) 最初の1機を送り得る最大距離はいくらか。
> (b) 燃料補給はどれほどの距離のところで行うべきか。

この問題を選んだ理由は，後述するように線形計画法を用いることで解決できるため，1節で述べたねらいにある，高校で学んだ数学を発展させることができるからである。また，現実的な問題であるため，社会における数学の有用性も伝えられると考えた。加えて，著者の飛行機を題材とした教材を作りたいという希望もこの題材を選んだ理由の1つである。

この問題を線形計画法とのつながりが明確になるよう，[2]を参考にして次のように変更した。

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]日本女子大学理学部
[3]岐阜大学教育学部

問題． 航続飛行距離が同じ飛行機が 3 機あり，互いに空中給油が可能であるとする。3 機が同時に飛行場を飛び立ち，このうち 1 機をできるだけ遠くまで飛行させたい。このときの最大飛行距離を求めよ。ただし，残りの 2 機は飛び立った飛行場に戻ることとし，飛行場に戻った飛行機はすぐには再び飛び立てないものとする。また，離着陸，空中給油にかかる時間は考えないことにする。（以下,「問題」で，これを指すものとする）

この「問題」を解くために数値や記号を次のように定める。

- 各飛行機の燃料タンクの最大容量を f[kL]，燃費を c[km/kL] とする。
- 1 号機，2 号機は飛行場に戻り，3 号機を遠くまで飛行させるとする。
- 飛行場を O，1 号機が折り返す点を P，2 号機が折り返す点を Q，3 号機の到達点を R とする。
- OP 間の距離を x[km]，PQ 間の距離を y[km]，QR 間の距離を z[km] とする。

はじめに，各飛行機の動く様子について考える。各飛行機は互いに空中給油をするために，折り返すまでは同じ位置を一定の同じ速度で飛ぶ。また，1，2 号機は飛び立った飛行場に戻らなければいけないが，このとき，例えば，1 号機が P でエンジンを切って空中で待機し，折り返してきた 2 号機に燃料を給油し，一緒に飛行場に戻るということはできない。さらに，飛行場に戻った飛行機はすぐには再び飛び立てないので，例えば，先に飛行場に戻った 1 号機が飛行場で燃料を満タンにして，2 号機を迎えに行くということはできない。以上のことから，3 機の飛行の様子は図 1 のようになる。

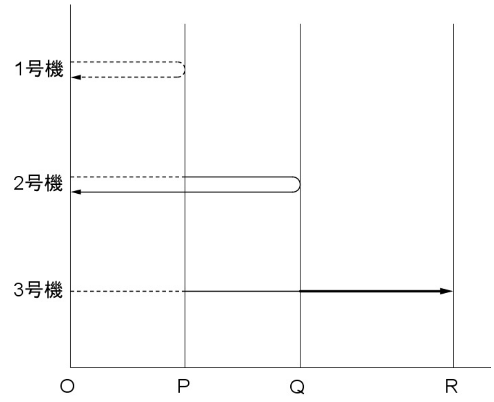

図 1

次に，飛行機の移動可能な距離に関する条件を x，y，z を用いて表す。3 機の飛行機は最初に積んだ 3 機分の燃料のみを用いて移動しなければならない。従って，3 機の飛行距離の合計は $3fc$[km] 以下なので，

$$5x + 3y + z \leq 3fc.$$

1 号機が折り返した後，2 号機と 3 号機は 2 機分の燃料を用いて飛行するので，最大飛行距離は $2fc$[km] である。よって，次の不等式が成り立つ。

$$x + 3y + z \leq 2fc.$$

2 号機が折り返した後，3 号機は 1 機分の燃料を用いて飛行する。従って，最大飛行距離は fc[km] なので，

$$z \leq fc.$$

また，x，y，z は距離なので，

$$x,\ y,\ z \geq 0.$$

以上のことから，問題は次のように書き換えられる。

問題． 「条件

$$\begin{aligned} 5x + 3y + z &\leq 3fc, \\ x + 3y + z &\leq 2fc, \\ z &\leq fc, \\ x, y, z &\geq 0, \end{aligned}$$

の下で，

$$x+y+z$$

の最大値を求めよ。」

これは，3 変数の線形計画法の問題である。以下，この問題をシンプレックス法と領域の形状の性質を利用した方法の 2 通りの解法を紹介する。

1. シンプレックス法

$$d=\max(x+y+z),$$

を求める。ただし，x，y，z は次の領域を動くものとする。

$$\begin{cases} 5x+3y+z \leq 3fc, \\ x+3y+z \leq 2fc, \\ z \leq fc, \\ x, y, z \geq 0. \end{cases} \qquad (\sharp)$$

まず，スラック変数 λ_1，λ_2，λ_3 を導入して，問題を次のように書き換える。

$$d'=\max(x+y+z),$$

ただし，x，y，z，λ_1，λ_2，λ_3 は次の領域を動くものとする。

$$\begin{cases} \lambda_1=3fc-5x-3y-z, \\ \lambda_2=2fc-x-3y-z, \\ \lambda_3=fc-z, \\ x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0. \end{cases} \qquad (*)$$

ここで，$d=d'$ を示す。

$$d=\max(x+y+z)=x_*+y_*+z_*$$

とする。ただし，

$$\begin{aligned} 5x_*+3y_*+z_* &\leq 3fc, \\ x_*+3y_*+z_* &\leq 2fc, \\ z_* &\leq fc, \\ x_*, y_*, z_* &\geq 0. \end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned} \lambda_1&=3fc-5x_*-3y_*-z_*, \\ \lambda_2&=2fc-x_*-3y_*-z_*, \\ \lambda_3&=fc-z_*, \end{aligned}$$

とおくと，$(x_*,\ y_*,\ z_*,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ は条件 $(*)$ を満たす。よって，

$$x_*+y_*+z_* \leq d'.$$

つまり，

$$d \leq d'.$$

逆に，

$$d'=\max(x+y+z)=x_\sharp+y_\sharp+z_\sharp$$

とする。ただし，

$$\begin{aligned} \lambda_1&=3fc-5x_\sharp-3y_\sharp-z_\sharp, \\ \lambda_2&=2fc-x_\sharp-3y_\sharp-z_\sharp, \\ \lambda_3&=fc-z_\sharp, \\ x_\sharp, y_\sharp, z_\sharp, &\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0. \end{aligned}$$

これは，

$$\begin{aligned} 5x_\sharp+3y_\sharp+z_\sharp &\leq 3fc, \\ x_\sharp+3y_\sharp+z_\sharp &\leq 2fc, \\ z_\sharp &\leq fc, \end{aligned}$$

となり，$(x_\sharp,\ y_\sharp,\ z_\sharp,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ は条件 $(\sharp)$ を満たす。よって，

$$d \geq x_\sharp+y_\sharp+z_\sharp.$$

つまり，

$$d \geq d'.$$

以上から，

$$d=d'.$$

従って，$(*)$ の領域上で d' を求めればよい。そのために，$w=x+y+z$ とおく。

まず，$x=y=z=0$ とすると，

$$\begin{aligned}&(w,\ x,\ y,\ z,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)\\=&(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 3fc,\ 2fc,\ fc).\end{aligned}$$

ここで，$x=\alpha$，$y=0$，$z=0$ $(\alpha\geq 0)$ とすると，

$$\begin{cases}w=\alpha & \geq 0,\\ \lambda_1=3fc-5\alpha & \geq 0,\\ \lambda_2=2fc-\alpha & \geq 0,\\ \lambda_3=fc & \geq 0,\end{cases}$$

なので，

$$0\leq\alpha\leq\frac{3}{5}fc.$$

$(*)$ に $x=\frac{3}{5}fc$，$y=z=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}&(w,\ x,\ y,\ z,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)\\&=\left(\frac{3}{5}fc,\ \frac{3}{5}fc,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{7}{5}fc,\ fc\right).\end{aligned}$$

このとき，$w=\frac{3}{5}fc.$

つぎに，$y=\beta$，$z=\lambda_1=0$ $(\beta\geq 0)$ とすると，

$$\begin{cases}w=\frac{3}{5}fc+\frac{2}{5}\beta & \geq 0,\\ x=\frac{3}{5}fc-\frac{3}{5}\beta & \geq 0,\\ \lambda_2=\frac{7}{5}fc-\frac{12}{5}\beta & \geq 0,\\ \lambda_3=fc & \geq 0,\end{cases}$$

なので，

$$0\leq\beta\leq\frac{7}{12}fc.$$

従って，$(*)$ に $y=\frac{7}{12}fc$，$z=\lambda_1=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}&(w,\ x,\ y,\ z,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)\\&=\left(\frac{5}{6}fc,\ \frac{1}{4}fc,\ \frac{7}{12}fc,\ 0,\ 0,\ 0,\ fc\right).\end{aligned}$$

このとき，$\frac{3}{5}fc<\frac{5}{6}fc$ である。

今度は，$z=\gamma$，$\lambda_2=\lambda_3=0$ $(\gamma\geq 0)$ とすると，

$$\begin{cases}w=\frac{5}{6}fc+\frac{2}{3}\gamma & \geq 0,\\ x=\frac{1}{4}fc & \geq 0,\\ y=\frac{7}{12}fc-\frac{1}{3}\gamma & \geq 0,\\ \lambda_3=fc-\gamma & \geq 0,\end{cases}$$

なので，

$$0\leq\gamma\leq fc.$$

$(*)$ に $z=fc$，$\lambda_1=\lambda_2=0$ を代入すると，

$$\begin{aligned}&(w,\ x,\ y,\ z,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)\\&=\left(\frac{3}{2}fc,\ \frac{1}{4}fc,\ \frac{1}{4}fc,\ fc,\ 0,\ 0,\ 0\right).\end{aligned}$$

このとき，$\frac{5}{6}fc<\frac{3}{2}fc$ である。

最後に，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ とすると，

$$\begin{aligned}&(x,\ y,\ z,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)\\&=\left(\frac{1}{4}fc,\ \frac{1}{4}fc,\ fc,\ 0,\ 0,\ 0\right)\end{aligned}$$

となり，

$$w=\frac{3}{2}fc$$

である。これが最大値であることを示す。λ_1，λ_2，λ_3 のいずれかが正の値であるとする。

$$\begin{aligned}z&=fc-\lambda_3,\\ 5x+3y+z&=3fc-\lambda_1,\\ x+3y+z&=2fc-\lambda_2\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}5x+3y&=3fc-\lambda_1-(fc-\lambda_3)\\&=2fc-\lambda_1+\lambda_3.\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}x+3y&=2fc-\lambda_2-(fc-\lambda_3)\\&=fc-\lambda_2+\lambda_3.\end{aligned}\tag{2}$$

(1)，(2) を x，y について解くと，

$$x = \frac{fc - \lambda_1 + \lambda_2}{4},$$
$$y = \frac{3fc + \lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3}{12}.$$

よって，

$$\begin{aligned} w &= x + y + z \\ &= \frac{fc - \lambda_1 + \lambda_2}{4} + \frac{3fc + \lambda_1 - 5\lambda_2 + 4\lambda_3}{12} \\ &\quad + fc - \lambda_3 \\ &= \frac{18fc - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - 8\lambda_3}{12}. \end{aligned}$$

$\lambda_1 \geq 0$，$\lambda_2 \geq 0$，$\lambda_3 \geq 0$ なので，

$$w \leq \frac{18}{12}fc = \frac{3}{2}fc.$$

よって，$\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 0$，$\lambda_3 = 0$ のとき，w は最大となりうる。また，このとき，x，y，z は一意に定まるので，このときが最大である。

2．領域の形状の性質を利用する解法

まず，凸多角形の性質として，次が成り立つ。ここでは，この性質の証明は省略する。

性質 1. D を座標平面上の凸多角形で表される領域とする。ただし，D は境界を含むものとする。点 P が D の内部にあるとき，P を通る傾きが 1 の直線を引くと，D の境界線との交点 P_1，P_2 があり，さらに，P は線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 上にある（図 2）。

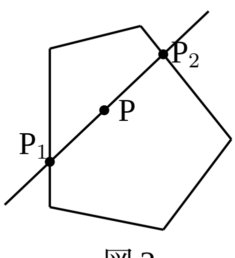

図 2

補題 1. ある $(x^*,\ y^*) \in \mathrm{D}$ に対し，

$$\max\{x + y | (x,\ y) \in \mathrm{D}\} = x^* + y^*$$

とすると，

$$(x^*,\ y^*) \notin \mathrm{intD}$$

である。ここで，intD は D の内部を表す。

（証明）

点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を D の内部の点とする。P を通り，傾きが 1 の直線の方程式は

$$y = x - p + q. \tag{3}$$

性質 1 より，この直線は D の境界線との交点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ をもち，さらに P は線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 上にある。よって，$x_1 < x_2$ とすると，p，x_1，x_2 の大小関係は

$$x_1 < p < x_2.$$

また，(3) より y_1，y_2 を x_1，x_2 を使って表すと，

$$y_1 = x_1 - p + q,\ y_2 = x_2 - p + q.$$

ここで，P_1，P_2，P における，$x + y$ の値を比べる。

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &= x_1 + x_1 - p + q \\ &= 2x_1 - p + q. \\ x_2 + y_2 &= x_2 + x_2 - p + q \\ &= 2x_2 - p + q. \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} (p + q) - (x_1 + y_1) &= p + q - 2x_1 + p - q \\ &= 2(p - x_1) > 0. \\ (p + q) - (x_2 + y_2) &= p + q - 2x_2 + p - q \\ &= 2(p - x_2) < 0. \end{aligned}$$

ゆえに，

$$x_1 + y_1 < p + q < x_2 + y_2.$$

したがって，P_2 での $x + y$ の値が P での $x + y$ の値より大きいので，P では $x + y$ は最大とはならない。

（証明終）

補題 2. D のある辺 P_1P_2 を含む直線の傾きが -1 ではないとする。このとき，ある $(x^*,\ y^*) \in \mathrm{D}$ に対し，

$$\max\{x+y|(x,\ y)\in \mathrm{D}\} = x^* + y^*$$

とすると，

$$(x^*,\ y^*) \notin \mathrm{P_1P_2}.$$

ただし，$\mathrm{P_1P_2^\circ}$ で端点を含まない辺 P_1P_2 を表す。

（証明）

点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を辺 P_1P_2 上の P_1，P_2 以外の点とする。P_1，P_2 の座標をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とする（図 3）。まず，

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

と仮定すると，

$$x_1 - x_2 = -(y_1 - y_2).$$

(i) $x_1 - x_2 \neq 0$ のとき

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -1.$$

辺 P_1P_2 の傾きが -1 となり矛盾する。

(ii) $x_1 - x_2 = 0$ のとき

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

P_1 と P_2 が同一の点となるが，P_1，P_2 は辺の両端であるので，これは矛盾である。

(i)，(ii) より，

$$x_1 + y_1 \neq x_2 + y_2$$

が成り立つ。

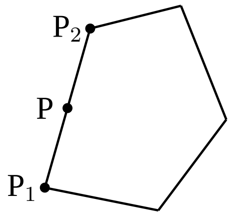

図 3

ここで，$x_1 + y_1 < x_2 + y_2$ とする。P が $\mathrm{P_1P_2^\circ}$ 上にあるので，p，q は実数 t $(0 < t < 1)$ を用いて，

$$p = (1-t)x_1 + tx_2,\ q = (1-t)y_1 + ty_2$$

と表される。このとき，

$$\begin{aligned}&(x_2 + y_2) - (p + q)\\ =&x_2 + y_2 - (1-t)x_1 - tx_2 - (1-t)y_1 - ty_2\\ =&(1-t)\{(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)\}.\end{aligned}$$

$0 < t < 1$ より，$1 - t > 0$ なので，

$$(1-t)\{(x_2 + y_2) - (x_1 + y_1)\} > 0.$$

ゆえに，

$$p + q < x_2 + y_2.$$

よって，P での $x + y$ の値より P_2 での $x + y$ の値が大きいので，P で最大とはならない。$x_1 + y_1 > x_2 + y_2$ のときも同様である。

（証明終）

定理 1. D を座標平面上の（境界を含む）凸多角形とする。

$$\max\{x+y|(x,\ y)\in \mathrm{D}\} = x^* + y^*$$

となる

$$(x^*,\ y^*) \in \mathcal{P}$$

が存在する。ただし，$\mathcal{P}$ は D の頂点の集合である。

（証明）

D が傾き -1 の辺をもたないとき，補題 1，2 より，D の頂点のいずれかで $x+y$ の値が最大となる（図 4）。

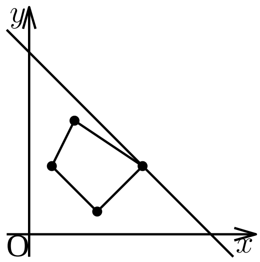

図4

Dが傾き -1 の辺 P_1P_2 をもち，P_1P_2 上の点 $P(p,\ q)$ で $x+y$ が最大となったとする（図5）。P_1，P_2 の座標をそれぞれ $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると，辺 P_1P_2 の傾きが -1 なので，

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1,\ \frac{q-y_2}{p-x_2}=-1.$$

よって，

$$x_1+y_1=x_2+y_2=p+q.$$

したがって，頂点 P_1，P_2 での値と P での値が等しいことが分かる。

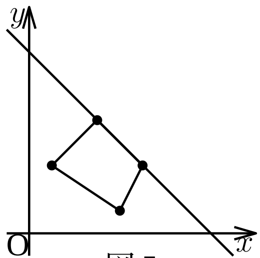

図5

ゆえに，P_1 の座標を $(x^*,\ y^*)$ とすれば，

$$x^*+y^*=\max\{x+y|(x,\ y)\in \mathrm{D}\}$$

となる。

（証明終）

上述のスラック変数を用いた方法は，線形計画法の問題を解く上では，有効かつ一般的な方法であるが，高校数学との関連が少なく，1節で述べたねらいを達成できないと考えた。そこで，領域の形状の性質を利用する方法をセミナーで扱うことにした。

3．テキストについて

セミナーでは，我々が作成したテキストを用いた。テキストの章立て，テキストを作成する上で2節の内容を変更したところ，解法に至るまでの流れで配慮したところを説明する。

燃料タンクの最大容量は1000[kL]，燃費は1[km/kL]とした。

1章　不等式の表す領域

領域を定義して，座標平面上に不等式の表す領域を図示することを学習する。また，連立不等式の表す領域についても学習する。ここでは，領域を表す不等式に現れる不等号は等号付きのみを取り扱っている。

2章　領域と最大・最小

座標平面上に図示した領域を用いて，領域内の点における x，y の1次式の値の最大値，最小値を求める。そして，そのような問題を線形計画法の問題ということを学習する。

3章　2機の場合

「問題」を2機の場合に限定した問題を解く。2機の飛行の様子を表した図1から立式を行い，線形計画法を用いて解く。

4章　線形計画法

定理1を線形計画法の性質として紹介し，1次式 $x+y$ の最大値を求めるには，領域が多角形で表される場合，頂点での値を調べればよいことを証明する。これは領域の形状の性質を利用する方法であるが，性質1は証明なしに用いてもよいことにした。また，定理1は一般的な1次式についても成り立つが，その証明は難しく複雑なので $x+y$ に限定した。その理由は，ここまでに扱った2機の場合では，$x+y$ の最大値を求めていたからである。

「問題」は3変数の線形計画法の問題であり，条件式の表す領域は3次元空間の凸多面体になる。定理1は平面についての定理であるが，3次元空間に拡張した場合でも同様の手順で証明できるため,「問題」を解くときには，証明なしに凸多面体の頂点での値を調べればよいことにした。

5章　座標空間

座標空間の定義や空間における2点間の距離の求め方を学習する。さらに，座標空間上で等式 $3x+2y+z=36$ を満たす点全体の集合が平面を表していることを把握するために，x，y の各値に対する z の値についての表（表1）を埋め，どのような図形になるか予想する。

y \ x	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

表1

平面の方程式は学習指導要領外の内容であるが，1節で述べたように，学校で学ぶ数学の発展的な内容であるため取り扱うことにした。

平面の方程式を考えるには，法線ベクトルを用いた方法が一般的であるが，このセミナーでは，表1をもとにした方法で導入することにした。この方法の長所と短所を示す。

（長所）

方程式を $z=36-3x-2y$ として，表1における x と y の値を代入し，z の値を求める（表2）。

y \ x	0	1	2	3	4	5
0	36	33	30	27	24	21
1	34	31	28	25	22	19
2	32	29	26	23	20	17
3	30	27	24	21	18	15
4	28	25	22	19	16	13
5	26	23	20	17	14	11

表2

そして，表から各 x に対し，y が1次関数的に変化することから，各 x に対し，グラフが直線になっていることが分かる。また，各 y に対しても x が1次関数的に変化しているので，直線が直線的に移動してできた図形，つまり，平面になっていることが分かる。このように，グラフをかくときにはまず表を書くという中学校で学習したことが活用できること，自らの発見をもとに平面であることに気付けることがこの方法の長所である。

（短所）

この方法では，平面の重要な特徴である法線について，一切触れない点が短所である。

以上の長所，短所からこの方法で平面について考察することにした。加えて，参加する生徒の一部は，ベクトルが未履修であるため，セミナーでベクトルを一から学習していくだけの時間を確保できないと考えたのも理由の1つである。

6章　3機の場合

「問題」を領域上の最大値を求める問題として数式で表現する。図1の点線，細線，太線は色を変えて記入して，それらを参考に立式する。

7章　工作

ここでは，条件式の表す多面体を作製する。2変数の場合，領域を平面に図示することができるが，3変数の場合は図示しても分かりにくいので，実際に多面体を作製し，それを用いて「問題」を解くことにした。

多面体の作製は，まず，条件式から多面体の概形を図示する。そして，それを参考にして多面体の各面ごとの辺の長さを求め，設計図を描く。このとき，辺の長さを求めるためには，多面体の各頂点の座標が必要なので，あらかじめ求めておく。最後に，設計図をもとに工作用紙で多面体の各面を作り，それを貼り合せる。

この活動を通して，座標空間における平面への理解を深めることができると考えた。

8章　問題を解こう

7章で作った多面体の頂点での $x+y+z$ の値を調べることにより，「問題」の答えを求める。7章において，多面体の8個の頂点の座

標はそれぞれ，

$$(0,\ 0,\ 0),\ (600,\ 0,\ 0),$$
$$(250,\ \tfrac{1750}{3},\ 0),\ (0,\ \tfrac{2000}{3},\ 0),$$
$$(0,\ 0,\ 1000),\ (400,\ 0,\ 1000),$$
$$(250,\ 250,\ 1000),\ (0,\ \tfrac{1000}{3},\ 1000)$$

であることが分かる。これらの $x+y+z$ の値を調べれば，$(250,\ 250,\ 1000)$ のとき，最大値 1500 であることが分かる。

9章　チャレンジ問題

8章まではすべての生徒が理解できるようにし，そこを終えた生徒は9章に取り組む。この章では，8章までに学んだことを利用して，4機の場合，n 機の場合の最大飛行距離を予想し，それらの解の意味を考察する。

4機の場合は，1号機はPで折り返し，2号機はQで折り返し，3号機はRで折り返し，4号機をSまで飛行させるとすると，

$$\mathrm{OP}=\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=200,\ \mathrm{RS}=1000$$

となり，最大飛行距離は1600[km]になる。

また，n 機の場合は，1号機は P_1 で折り返し，2号機は P_2 で折り返し，…，$n-1$ 号機は P_{n-1} で折り返し，n 号機を P_n まで飛行させるとすると，

$$\mathrm{OP}_1=\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\cdots=\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}=\frac{1000}{n+1},$$
$$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=1000,$$

となり，最大飛行距離は $\dfrac{2000n}{n+1}$ となる。

これらの解の意味は次のようなものであると考える。1号機の燃料で，すべての飛行機が OP_1 を飛行する分と1号機が飛行場まで戻る分をまかない，2号機の燃料で，残りのすべての飛行機が $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を飛行する分と2号機が飛行場まで戻る分をまかない，というようにし，最後に，燃料が満タンの n 号機が1000[km]飛行するというのが，最大飛行距離を飛ぶときの飛行の仕方である。

解の意味を考察させる理由は，現実の問題から始まったものを数学の世界に留めたままにせず，現実の世界に戻すことで，数学の有用性をより実感できると考えたからである。

4. 授業内容

4.1 授業の概要

岐阜県教育委員会の主催する「平成24年度高校数学セミナー」において下記の要領で実践した。

授業名：　飛行機チームスプリント
場　所：　岐阜大学教育学部
実施日：　平成24年8月4日，5日
対　象：　岐阜県内の中学3年生，高校1，2年生（59名）

4.2 授業のねらい

1. 線形計画法を理解し，その有用性を実感できる。
2. 座標空間における平面の方程式を理解することができる。

4.3 活動の様子

生徒4人に大学生1人を班長とした班をつくった。班ごとに活動し，テキストに沿って学習を進めていった（写真1）。

写真1

全体の進度を合わせるために，様子を見ながら活動を区切り，授業者が問題や解答を説明した（写真2）。

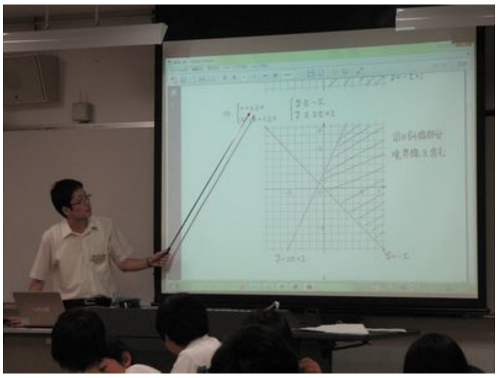

写真 2

5 章では，表 1 をもとに授業者が作製した平面のモデル（写真 3）を提示した。

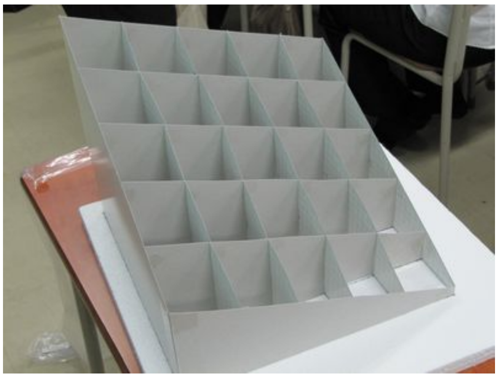

写真 3

7 章では，各班で 1 つ多面体を作製した（写真 4）。

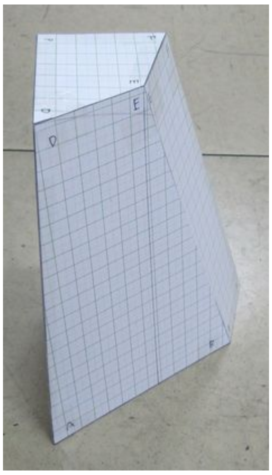

写真 4

多面体の設計図を描くには，多面体の各辺の長さを求めなければいけないが，この計算はとても煩雑なため，班の中で面ごとに分担して辺の長さを求める姿が見られた。また，工作用紙で多面体を作るときも，工作用紙に面を描く生徒，面を切り取る生徒，面を貼り合せる生徒に分かれて作業を行っていた。

授業の最後に，数学の有用性をより実感してもらうために，今野が [3] で挙げた線形計画法を活用した次の事例を紹介した。

デルタ航空は経費削減のために，乗務員の 1 週間単位のスケジュールを数理モデルで定式化したところ，変数が 1700 万，条件式が 800 本の線形計画法の問題が得られた。デルタ航空はこの問題を解いたことで年間 1000 万ドル以上の経費削減が可能になった。

この事例を紹介したところ，生徒たちは，3 変数の問題を解く大変さを知っているので，変数が 1700 万と聞いて驚き，また，それ以上に 1000 万ドル以上の経費削減が可能になったということに驚いていた。

5. 考察

本授業のねらいの達成度について考察する。

1. 線形計画法を理解し，その有用性を実感できる。

授業後のアンケートで，線形計画法について理解できましたか，という質問に対して，理解できたと答えた生徒は 59 人中 54 人であった。また，線形計画法の良さはどのようなことだと思いますか，という質問に対して,「図形だから見た目で判断できる」,「図形の各頂点を調べれば最大が分かるというところ！」といった回答を得られた。このことから，このねらいは達成できたといえる。

2. 座標空間における平面の方程式を理解することができる。

授業後のアンケートで,「線形計画法や座標空間が使えるようになって良かったし，本来なら自分では解けないような事をヒントを聞

きながら解けて良かった。」という感想があった。しかし，時間の都合で，生徒が平面のモデルを作製することはなく，授業者の作製したものを提示するだけであった。そのため，生徒が平面の方程式を理解できたか疑問が残る。

6. 今後の課題

本実践では，時間の都合で平面のモデルを生徒が作製できなかった。平面のモデルを生徒が作製していれば，平面の方程式についての理解が深まったかもしれないが，必ずしも，平面のモデルを作製する時間をとれるとは限らない。そのため，平面のモデルを作製しなくても，生徒が平面の方程式を理解できるような紹介の仕方を検討したい。

また，本教材の「問題」を数学の言葉に直す部分は授業者から提示した。そのため，その活動も生徒に行わせるような改善が必要である。

引用文献

[1] T.L. サーティー，1960，オペレーションズ・リサーチの数学的方法　下，紀伊国屋書店.
[2] 若山邦紘，1996，飛行機を遠くまで飛ばす話：昔の OR のテキストから，オペレーションズ・リサーチ：経営の科学，41(3)，162-165.
[3] 今野浩，1995，カーマーカー特許とソフトウェア，中央公論社，35-36.