岐阜数学教育研究
2012, Vol. 11, 1-21

サイコロゲームを題材とした教材開発と実践

浅井寛隆[1]，愛木豊彦[2]

中学校学習指導要領の改訂により，中学校数学科において，確率・統計に関する領域「資料の活用」が新設された。そこで，生徒が興味・関心を持って「資料の活用」の領域を学習できるようなサイコロを使ったゲームを考え，教材化した。本論文では，その教材の内容について報告する。
＜キーワード＞サイコロ，期待値，平均，同様に確からしい，六面体

1. はじめに

中学校 2 年生を対象に，3 時間からなる授業を平成 23 年 9 月にさせていただくことになった。その授業案を考えるに当たり,「資料の活用」に着目した。それは,「資料の活用」は現行の学習指導要領改訂の際, 新設された領域なので，教材研究が十分でないと考えたためである。中学校学習指導要領解説数学編 [1] によると,「資料の活用」の領域では，資料に基づいて集団の傾向や特徴をとらえ，それをもとに判断することを重視するとある。また，各学年の目標として，第 1 学年では「目的に応じて資料を収集して整理し，その資料の傾向を読み取る能力を培う」，第 2 学年では「不確定な事象を調べることを通して，確率について理解し用いる能力を培う」，第 3 学年では「母集団から標本を取出し，その傾向を調べることで，母集団の傾向を読み取る能力を培う」とある。授業の題材については，実施時期が中学 2 年生の 9 月なので，確率の基礎的な概念について，1 年生で学習した方法を用いて考察できる内容にしたいと考えた。そこで，不確定な事象における試行から資料となるデータを収集・処理をし，それらをもとに考察できるような授業を開発することにした。次節で示す題材は [2][3] を参考にして，開発したものである。

2．授業の概要

2.1. 題材について

本論文で述べる授業の題材はサイコロを使ったゲームである。そのゲームとは次に示すものである。「サイコロを二人で交互に振り，先に 1 から 6 のすべての目が出たほうが勝ち。ただし，サイコロは 1 人 2 個持つことができ，ゲーム中に自由に交換してよい。出た目は下になった面の数字とする」

このゲームでは，立方体以外のものでも以下の条件を満たせば，サイコロと呼ぶことにする。

- 工作用紙で作られている
- 六面体である
- 1 つの面に 1 から 6 の数字が 1 つずつかかれている
- 面を貼りあわせて作ってもよい

従って，上の条件を満たすように数字をかけば，五角錐でもサイコロと呼ぶ。このような立体でも，出た目が一つに決まるよう，下になった面の数字を出た目とする。このゲームで勝つためには，できるだけ少ない回数で

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]日本女子大学理学部

1 から 6 のすべての目を出さなければならない。そこで，面の出やすさや二つのサイコロの組み合わせを考える必要がある。サイコロの例として以下のようなものがある。写真 1 にある立方体の形をしている普通のサイコロを立方体サイコロと呼ぶ。また，写真 2，3，4 にある二つの面，三つの面，四つの面が出やすいサイコロを，それぞれ二面サイコロ，三面サイコロ，四面サイコロと呼ぶことにする。

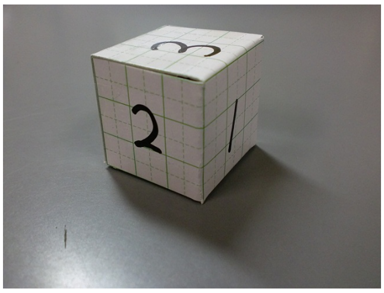


写真 1

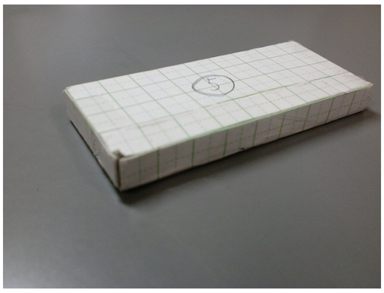


写真 2

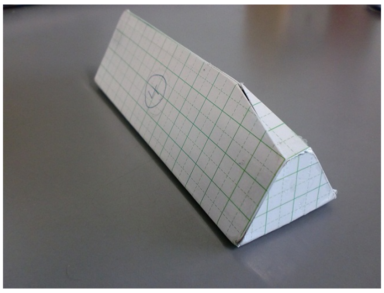


写真 3

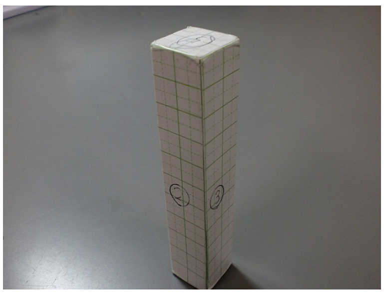


写真 4

ここで，1 から 6 のすべての目が出る回数を X とおく。以下，次の三通りのサイコロの組み合わせを考える。

(ア) 立方体サイコロに 1〜6 までの数字が各面に一つずつかかれたものを一つ持った場合

(イ) 二面サイコロの出やすい二つの面に 1 と 2 を一つずつかき，残りの四面に 3 から 6 までが一つずつかいてあるサイコロと，四面サイコロの出やすい四つの面に 3 から 6 までを一つずつかき，残りの二面に 1 と 2 を一つずつかいたサイコロの二つのサイコロを持った場合

(ウ) 一つの三面サイコロの出やすい三つの面に 1 から 3 までを一つずつかき，残りの三面に 4 から 6 までを一つずつかく。もう一つの三面サイコロの出やすい三つの面に 4 から 6 までを一つずつかき，残りの三面に 1 から 3 までを一つずつかく。これら二つのサイコロを持った場合

これらの三つの各場合において，300 回ゲームを行ったときの X の平均値は，(ア) の場合は 14.87 回，(イ) の場合は 11.33 回，(ウ) の場合は 10.66 回であった。

(ア)，(イ)，(ウ) の三つの場合の X の期待値をそれぞれ求める。

まず，(ウ) の場合を考える。このとき出やすい三つの面以外の面は出ないとし，出やすい三つの面はそれぞれ同じ確率で出ると仮定する。

a_n:n 回で 1 種類の目しか出ない確率
b_n:n 回で 2 種類の目しか出ない確率
c_n:n 回で 3 種類すべての目が出る確率

とする。このとき a_n,b_n,c_n は

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{3^{n-1}} \quad (n \geq 1) \\ b_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1} \quad (n \geq 3), b_2 = \frac{2}{3} \\ c_n = \frac{1}{3}b_{n-1} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

を満たす。以上の漸化式から a_n,b_n,c_n の一般項を求める。

まず,

$$b_n = \frac{2}{3}b_{n-1} + \frac{2}{3^{n-1}}$$

を得る。よって

$$\begin{cases} b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{2}{3^n} \quad (n \geq 2) \\ b_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

より,

$$3^{n+1}b_{n+1} = 2 \cdot 3^n b_n + 6$$

である。ここで, $x_n = 3^n b_n$ とすると

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 6 \quad (n \geq 2) \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

を得る。さらに,
$y_n = x_{n+1}$ とすると

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2y_n + 6 \quad (n \geq 1) \\ y_1 = 6 \end{cases}$$

となる。ここで,

$$y_n + 6 = 12 \cdot 2^{n-1}$$

より,

$$\begin{aligned} y_n + 6 &= 12 \cdot 2^{n-1} \\ y_n &= 12 \cdot 2^{n-1} - 6 \\ x_n &= 12 \cdot 2^{n-2} - 6 \\ 3^n b_n &= 12 \cdot 2^{n-2} - 6 \\ b_n &= \frac{12 \cdot 2^{n-2} - 6}{3^n} \\ b_n &= \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} \\ c_n &= \frac{2^{n-1} - 2}{3^{n-1}} \end{aligned}$$

となる。

このことより, (ウ) の場合, k 回 $(k \geq 6)$ でゲームを終える確率 $P(X = k)$ は,

$$P(X = k) = \sum_{n=3}^{k-3} c_n c_{k-n}$$

と表せる。ここで,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=3}^{k-3} c_n c_{k-n} \\ &= \sum_{n=3}^{k-3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{k-n-1} \\ &\qquad \left(1 - \frac{1}{2^{k-n-2}}\right) \\ &= \sum_{n=3}^{k-3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{k-n-2}} + \frac{1}{2^{k-4}}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \sum_{n=3}^{k-3} \left(1 - \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{k-n-2}} + \frac{1}{2^{k-4}}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \left(\sum_{n=3}^{k-3} 1 - \sum_{n=3}^{k-3} \frac{1}{2^{n-2}}\right. \\ &\qquad \left. - \sum_{n=3}^{k-3} \frac{1}{2^{k-n-2}} + \frac{1}{2^{k-4}} \sum_{n=3}^{k-3} 1\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} (k-5) + \frac{4}{3^{k-2}}(k-5) \\ &\quad - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \left(\sum_{n=3}^{k-3} \frac{1}{2^{n-2}} + \sum_{n=3}^{k-3} \frac{1}{2^{k-n-2}}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=3}^{k-3} \frac{1}{2^{n-2}} \\ &= 2\left(\sum_{n=1}^{k-3} \frac{1}{2^{n-2}} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= 2\left(\frac{1 - \frac{1}{2^{k-3}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{3}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2^{k-5}} \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=3}^{k-3} \frac{1}{2^{k-n-2}} \\ &= \sum_{n=3}^{k-3} 2^{n+2-k} \end{aligned}$$

$$= 2^{3-k}\sum_{n=3}^{k-3} 2^{n-1}$$
$$= 2^{3-k}\left(\sum_{n=1}^{k-3} 2^{n-1} - (1+2)\right)$$
$$= 2^{3-k}\left(\tfrac{1-2^{k-3}}{1-2} - 3\right)$$
$$= 1 - 2^{5-k}$$

である。(1) より, $k \geq 6$ に対し,

$$P(X=k)$$
$$= (\tfrac{2}{3})^{k-2}(k-5) + \tfrac{4}{3^{k-2}}(k-5)$$
$$-(\tfrac{2}{3})^{k-2}\left(1 - \tfrac{1}{2^{k-5}} + 1 - 2^{5-k}\right)$$
$$= k(\tfrac{2}{3})^{k-2} - 7(\tfrac{2}{3})^{k-2} + 4k\left(\tfrac{1}{3^{k-2}}\right) - 4\left(\tfrac{1}{3^{k-2}}\right)$$

となる。

次に, X の期待値を求める。(ウ) の場合の X の期待値 $E(X)$ は,

$$E(X) = \sum_{k=6}^{\infty} k\left(\sum_{n=3}^{k-3} c_n c_{k-n}\right)$$

と表せる。ここで,

$$\sum_{k=6}^{\infty} k\left(\sum_{n=3}^{k-3} c_n c_{k-n}\right)$$
$$= \sum_{k=6}^{\infty}\left(k^2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} - 7k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} + 4k^2\left(\tfrac{1}{3^{k-2}}\right) - 4k\left(\tfrac{1}{3^{k-2}}\right)\right) \qquad (2)$$

となる。

ここで二つの公式を紹介する。

公式 1

$$\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1} = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$$

公式 2

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}\left(-1 + \frac{2(1-r^n)}{1-r} - (2n-1)r^n\right) - \frac{n^2 r^n}{1-r}$$

(2) の右辺の各項について考える。まず, 第 1 項について考える

(第 1 項)

$$= \sum_{k=6}^{\infty} k^2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$$
$$= \tfrac{3}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{5} k^2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right) \qquad (3)$$

である。ここで, $T_s = \displaystyle\sum_{k=1}^{s} k^2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ $(s \geq 1)$ とすると, 公式 2 より

$$T_s$$
$$= \tfrac{1}{(1-\frac{2}{3})^2}\left(-1 + \tfrac{2(1-\frac{2}{3}^s)}{1-\frac{2}{3}} - (2s-1)(\tfrac{2}{3})^s\right) - \tfrac{s^2(\frac{2}{3})^s}{1-\frac{2}{3}}$$
$$= 45 - 18s(\tfrac{2}{3})^s - 30(\tfrac{2}{3})^{s-1} - 3s^2(\tfrac{2}{3})^s$$

である。よって,

$$\lim_{s\to\infty} T_s = 45$$

なので, (3) より

(第 1 項)

$$= \tfrac{3}{2}\left(45 - (45 - 90(\tfrac{2}{3})^5 - 30(\tfrac{2}{3})^4 - 75(\tfrac{2}{3})^5)\right)$$
$$= \tfrac{1120}{27}$$

となる。

次に第 2 項について考えると

(第 2 項)

$$= \sum_{k=6}^{\infty} 7k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$$
$$= \tfrac{21}{2}\sum_{k=6}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$
$$= \tfrac{21}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right) \qquad (4)$$

である。ここで, $U_s = \displaystyle\sum_{k=1}^{s} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ $(s \geq 1)$ とすると, 公式 1 より

$$U_s = \tfrac{1-(\frac{2}{3})^s}{(1-\frac{2}{3})^2} - \tfrac{s(\frac{2}{3})^s}{1-\frac{2}{3}}$$
$$= 9 - 9(\tfrac{2}{3})^s - 3s(\tfrac{2}{3})^s$$

である。よって,

$$\lim_{s\to\infty} U_s = 9$$

なので, (4) より,

(第 2 項)

$$= \tfrac{21}{2}\left(9 - \left(9 - 9(\tfrac{2}{3})^5 - 15(\tfrac{2}{3})^5\right)\right)$$
$$= \tfrac{896}{27}$$

となる。

次に第 3 項について考えると

(第 3 項)

$= \sum_{k=6}^{\infty} 4k^2 \left(\frac{1}{3^{k-2}}\right)$

$= 12 \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{1}{3^{k-1}}\right) - \sum_{k=1}^{5} k^2 \left(\frac{1}{3^{k-1}}\right) \right)$ (5)

である。ここで, $V_s = \sum_{k=1}^{s} k^2 \left(\frac{1}{3^{k-1}}\right) (s \geq 1)$ とすると, 公式 2 より

V_s

$= \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}\left(-1 + \frac{2(1-\frac{1}{3^s})}{1-\frac{1}{3}} - (2s-1)(\frac{1}{3^s})\right) - \frac{s^2(\frac{1}{3^s})}{1-\frac{1}{3}}$

$= \frac{9}{2} - \frac{3}{2}(\frac{1}{3^{s-1}}) - \frac{9}{2}s(\frac{1}{3^s}) - \frac{3}{2}s^2(\frac{1}{3^s})$

である。よって,

$$\lim_{s\to\infty} V_s = \frac{9}{2}$$

なので, (5) より,

(第 3 項)

$= 12\left(\frac{9}{2} - (\frac{9}{2} - \frac{3}{2}(\frac{1}{3^4}) - 5\frac{9}{2}(\frac{1}{3^5}) - 25\frac{3}{2}(\frac{1}{3^5}))\right)$

$= \frac{86}{27}$

となる。

次に第 4 項について考えると

(第 4 項)

$= \sum_{k=6}^{\infty} 4k \left(\frac{1}{3^{k-2}}\right)$

$= 12\left(\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{3^{k-1}}\right) - \sum_{k=1}^{5} k \left(\frac{1}{3^{k-1}}\right) \right)$ (6)

である。ここで $W_s = \sum_{k=1}^{s} k \left(\frac{1}{3^{k-1}}\right) (s \geq 1)$ とすると, 公式 1 より

$W_s = \frac{1-(\frac{1}{3^s})}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{s(\frac{1}{3^s})}{1-\frac{1}{3}}$

$= \frac{9}{4} - \frac{9}{4}(\frac{1}{3^s}) - \frac{3}{2}s(\frac{1}{3^s})$

である。よって,

$$\lim_{s\to\infty} W_s = \frac{9}{4}$$

なので, (6) より,

(第 4 項)

$= 12\left(\frac{9}{4} - (\frac{9}{4} - \frac{9}{4}(\frac{1}{3^5}) - 5\frac{3}{2}(\frac{1}{3^5}))\right)$

$= \frac{13}{27}$

となる。よって,

$E(X)$

$= \frac{1120}{27} - \frac{896}{27} + \frac{86}{27} - \frac{13}{27}$

$= 11$

以上より, (ウ) の場合の X の期待値は 11 回である。

次に, (イ) の場合を考える。このとき二面サイコロでは, 出やすい二つの面以外の面は出ないとし, 出やすい二つの面はそれぞれ同じ確率で出ると仮定する。四面サイコロでは, 出やすい四つの面以外の面は出ないとし, 出やすい四つの面はそれぞれ同じ確率で出ると仮定する。

まず, 二面サイコロにおいて, n 回で二種類の目が出る確率 P_n は

$$P_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

である。

次に, 四面サイコロにおいて,

a_n:n 回で 1 種類の目しか出ない確率

b_n:n 回で 2 種類の目しか出ない確率

c_n:n 回で 3 種類の目しか出ない確率

d_n:n 回で 4 種類すべての目が出る確率

とする。

このとき, a_n, b_n, c_n, d_n は

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{4^{n-1}} \quad (n \geq 1) \\ b_n = \frac{3}{4}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} \quad (n \geq 3), b_2 = \frac{3}{4} \\ c_n = \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{3}{4}c_{n-1} \quad (n \geq 4), c_3 = \frac{3}{8} \\ d_n = \frac{1}{4}c_{n-1} \quad (n \geq 4) \end{cases}$$

を満たす。以下, 上の漸化式から a_n, b_n, c_n, d_n の一般項を求める。

まず,

$$b_n = \frac{1}{2}b_{n-1} + \frac{3}{4^{n-1}}$$

を得る。ここで,

$$4^{n+1}b_{n+1} = 2 \cdot 4^n b_n + 12$$

より, $x_n = 4^n b_n$ とすると

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 12 \quad (n \geq 2) \\ x_2 = 12 \end{cases}$$

となる。さらに, $y_n = x_{n+1}$ とすると

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2y_n + 12 \quad (n \geq 1) \\ y_1 = 12 \end{cases}$$

となる。ここで,

$$y_n + 12 = 24 \cdot 2^{n-1}$$

より,

$$\begin{aligned} y_n &= 24 \cdot 2^{n-1} - 12 \\ x_n &= 12(2^{n-1} - 1) \\ 4^n b_n &= 12(2^{n-1} - 1) \\ b_n &= \frac{3}{4^{n-1}}(2^{n-1} - 1) \end{aligned}$$

となる。

次に, c_n の一般項を求める。

まず, 上の漸化式より, 2 つの定数 α, β に対し,

$$\alpha b_n + \beta c_n = \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta\right) b_{n-1} + \frac{3}{4}\beta c_{n-1} + \frac{3}{4^{n-1}}\alpha \tag{7}$$

が成り立つ。

より簡単な漸化式に帰着させるため，ここで, $\alpha : \beta = (\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta) : \frac{3}{4}\beta$ とすると,

$$\alpha = 2\beta$$

を得る。これを (7) に代入すると,

$$2\beta b_n + \beta c_n = \frac{3}{2}\beta b_{n-1} + \frac{3}{4}\beta c_{n-1} + \frac{6}{4^{n-1}}\beta$$

$$2b_n + c_n = \frac{3}{2}b_{n-1} + \frac{3}{4}c_{n-1} + \frac{6}{4^{n-1}}$$

となる。

次に, $x_n = 2b_n + c_n$ とすると,

$$x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + \frac{6}{4^{n-1}}$$

である。よって,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{6}{4^{n-1}} \quad (n \geq 3) \\ x_3 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで,

$$4^{n+1}x_{n+1} = 3 \cdot 4^n x_n + 24$$

より, $y_n = 4^n x_n$ とすると,

$$\begin{cases} y_{n+1} = 3y_n + 24 \quad (n \geq 3) \\ y_3 = 96 \end{cases}$$

が成り立つ。さらに, $z_n = y_{n+2}$ とすると,

$$\begin{cases} z_{n+1} = 3z_n + 24 \quad (n \geq 1) \\ z_1 = 96 \end{cases}$$

を得る。従って,

$$\begin{cases} z_{n+1} + 12 = 3(z_n + 12) \\ z_1 + 12 = 108 \end{cases}$$

より,

$$z_n + 12 = 108 \cdot 3^{n-1}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} z_n &= 108 \cdot 3^{n-1} - 12 \\ z_n &= 12(3^{n+1} - 1) \\ y_{n+2} &= 12(3^{n+1} - 1) \\ y_n &= 12(3^{n-1} - 1) \\ 4^n x_n &= 12(3^{n-1} - 1) \\ x_n &= \frac{3}{4^{n-1}}(3^{n-1} - 1) \\ c_n &= x_n - 2b_n \\ c_n &= \frac{3}{4^{n-1}}(3^{n-1}) - \frac{6}{4^{n-1}}(2^{n-1} - 1) \\ c_n &= \frac{3}{4^{n-1}}(3^{n-1} - 2^n + 1) \end{aligned}$$

である。さらに,

$$d_n = \frac{1}{4}c_{n-1}$$
$$d_n = \frac{3}{4^{n-1}}(3^{n-2} - 2^{n-1} + 1)$$

を得る。

ゆえに, (イ) の場合 n 回で 1 から 6 のすべての目が出る確率 $P(X=n)(n \geq 6)$ は

$$P(X=n)$$
$$= \sum_{k=2}^{n-4} \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{3}{4^{n-k-1}} \left(3^{n-k-2} - 2^{n-k-1} + 1\right)$$

である。ここで,

$$\sum_{k=2}^{n-4} \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{3}{4^{n-k-1}} \left(3^{n-k-2} - 2^{n-k-1} + 1\right)$$
$$= \tfrac{3}{4^n} \sum_{k=2}^{n-4} \frac{1}{2^{k-1}} \cdot 4^{k-1} \cdot 4^2 \left(3^{n-k-2} - 2^{n-k-1} + 1\right)$$
$$= \tfrac{3}{4^{n-2}} \sum_{k=2}^{n-4} 2^{k-1} \left(3^n \cdot \frac{1}{3^{k+2}} - 2^n \cdot \frac{1}{2^{k+1}} + 1\right)$$
$$= \tfrac{3}{4^{n-2}} \sum_{k=2}^{n-4} \left(3^{n-3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 2^{n-2} + 2^{k-1}\right)$$
$$= \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-2} \sum_{k=2}^{n-4} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{3}{2^{n-2}} \sum_{k=2}^{n-4} 1 + \tfrac{3}{4^{n-2}} \sum_{k=2}^{n-4} 2^{k-1} \tag{8}$$

である。ここで, 上式の右辺の各項について考える。

$$(\text{第 1 項}) = \sum_{k=1}^{n-4} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 1 = \frac{1 - (\frac{2}{3})^{n-4}}{1 - \frac{2}{3}} - 1 = 2 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-4}$$

である。次に

$$(\text{第 2 項}) = n - 5$$

である。また

$$(\text{第 3 項}) = \sum_{k=1}^{n-4} 2^{k-1} - 1 = \frac{2^{n-4} - 1}{2 - 1} - 1 = 2^{n-4} - 2$$

である。よって, (8) より

$$P(X=n)$$
$$= \left(\tfrac{3}{4}\right)^{n-2}\left(2 - 3\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-4}\right) - 3\left(\tfrac{1}{2^{n-2}}\right)(n-5) + \tfrac{3}{4^{n-2}}(2^{n-4} - 2)$$
$$= 2(\tfrac{3}{4})^{n-2} - \tfrac{27}{4}(\tfrac{1}{2^{n-2}}) - 3n(\tfrac{1}{2^{n-2}}) + 15(\tfrac{1}{2^{n-2}}) + \tfrac{3}{4}(\tfrac{1}{2^{n-2}}) - 6(\tfrac{1}{4^{n-2}})$$
$$= 2(\tfrac{3}{4})^{n-2} + 9(\tfrac{1}{2^{n-2}}) - 3n(\tfrac{1}{2^{n-2}}) - 6(\tfrac{1}{4^{n-2}})$$

である。

次に X の期待値を求める。(イ) の場合の X の期待値 $E(X)$ は,

$$E(X)$$
$$= \sum_{k=6}^{\infty} k \left(2\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} + 9\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right) - 3k\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right) - 6\left(\tfrac{1}{4^{k-2}}\right)\right)$$

である。よって,

$$\sum_{k=6}^{\infty} k \left(2\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2} + 9\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right) - 3k\left(\frac{1}{2^{k-2}}\right) - 6\left(\tfrac{1}{4^{k-2}}\right)\right)$$
$$= \tfrac{8}{3}\sum_{k=6}^{\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} + 18\sum_{k=6}^{\infty} k\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) - 6\sum_{k=6}^{\infty} k^2\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) - 24\sum_{k=6}^{\infty} k\left(\frac{1}{4^{k-1}}\right) \tag{9}$$

ここで, (9) の右辺の各項について考える。

(第 1 項)

$$= \tfrac{8}{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right) \tag{10}$$

なので, $T_s = \sum_{k=1}^{s} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$ $(s \geq 1)$ とすると,

$$T_s = \tfrac{1-(\frac{3}{4})^s}{(1-\frac{3}{4})^2} - \tfrac{s(\frac{3}{4})^s}{1-\frac{3}{4}}$$
$$= 16 - 16(\tfrac{3}{4})^s - 4s(\tfrac{3}{4})^s$$

となる。よって

$$\lim_{s\to\infty} T_s = 16$$

なので, (10) より
(第 1 項)
$= \frac{8}{3}\left(16-\left(16-16\left(\frac{3}{4}\right)^5-20\left(\frac{3}{4}\right)^5\right)\right)$
$= 96(\frac{3}{4})^5$
を得る。次に,
(第 2 項)
$= 18\sum_{k=6}^{\infty} k\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)$
$$= 18\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)-\sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right) \quad (11)$$
なので, $U_s=\sum_{k=1}^{s} k\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)(s\geq 1)$ とすると,
$U_s = \frac{1-\frac{1}{2^s}}{(1-\frac{1}{2})^2}-\frac{s(\frac{1}{2^s})}{1-\frac{1}{2}}$
$= 4-\frac{1}{2^{s-2}}-s(\frac{1}{2^{s-1}})$
となる。

$$\lim_{s\to\infty} U_s = 4$$

なので, (11) より
(第 2 項)
$= 18\left(4-\left(4-\frac{1}{2^3}-\frac{5}{2^4}\right)\right)$
$= \frac{63}{2^3}$
を得る。また,
(第 3 項)
$$= 6\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)-\sum_{k=1}^{5} k^2\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right) \quad (12)$$
なので, $V_s=\sum_{k=1}^{s} k^2\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)(s\geq 1)$ とすると,
V_s
$= \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2}\left(-1+\frac{2(1-(\frac{1}{2^s}))}{1-\frac{1}{2}}-(2s-1)(\frac{1}{2^s})\right)$
$-\frac{s^2(\frac{1}{2^s})}{1-\frac{1}{2}}$
$= 12-3(\frac{1}{2^{s-2}})-s(\frac{1}{2^{s-3}})-s^2(\frac{1}{2^{s-1}})$
となる。

$$\lim_{s\to\infty} V_s = 12$$

なので, (12) より
(第 3 項)
$= 6\left(12-\left(12-\frac{3}{2^3}-\frac{5}{2^2}-\frac{25}{2^4}\right)\right)$
$= \frac{153}{2^3}$
を得る。さらに,
(第 4 項)
$= 24\sum_{k=6}^{\infty} k\left(\frac{1}{4^{k-1}}\right)$
$$= 24\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{4^{k-1}}\right)-\sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{1}{4^{k-1}}\right)\right) \quad (13)$$
なので, $W_s=\sum_{k=1}^{s} k\left(\frac{1}{4^{k-1}}\right)(s\geq 1)$ とすると,
$W_s = \frac{1-\frac{1}{4^s}}{(1-\frac{1}{4})^2}-\frac{s(\frac{1}{4^s})}{1-\frac{1}{4}}$
$= \frac{16}{9}-\frac{16}{9}(\frac{1}{4^s})-\frac{4}{3}s(\frac{1}{4^s})$
となる。

$$\lim_{s\to\infty} W_s = \frac{16}{9}$$

なので, (13) より
(第 4 項)
$= 24\left(\frac{16}{9}-(\frac{16}{9}-\frac{16}{9}(\frac{1}{4^5})-\frac{20}{3}(\frac{1}{4^5}))\right)$
$= \frac{38}{3}(\frac{1}{4^3})$
を得る。よって, (9) より
$E(X)$
$= 96(\frac{3}{4})^5+\frac{63}{2^3}-\frac{153}{2^3}-\frac{38}{3}(\frac{1}{4^3})$
$= \frac{34}{3}$

以上より, (イ) の場合の X の期待値は $\frac{34}{3}$ 回である。

次に (ア) の場合を考える。このとき六つの面はそれぞれ同じ確率で出ると仮定する。六面サイコロにおいて,
a_n:n 回で 1 種類の目しか出ない確率
b_n:n 回で 2 種類の目しか出ない確率
c_n:n 回で 3 種類の目しか出ない確率
d_n:n 回で 4 種類の目しか出ない確率
e_n:n 回で 5 種類の目しか出ない確率
f_n:n 回で 6 種類すべての目が出る確率
とする。

このとき, $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ は

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{6^{n-1}} \quad (n \geq 1) \\ b_n = \frac{5}{6}a_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-1} \quad (n \geq 3), b_2 = \frac{5}{6} \\ c_n = \frac{2}{3}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} \quad (n \geq 4), c_3 = \frac{5}{9} \\ d_n = \frac{1}{2}c_{n-1} + \frac{2}{3}d_{n-1} \quad (n \geq 5), d_4 = \frac{5}{18} \\ e_n = \frac{1}{3}d_{n-1} + \frac{5}{6}e_{n-1} \quad (n \geq 6), e_5 = \frac{5}{54} \\ f_n = \frac{1}{6}e_{n-1} \quad (n \geq 6) \end{cases}$$

を満たす。以下, 上の漸化式から $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ の一般項を求める。

まず,

$$b_n = \frac{1}{3}b_{n-1} + \frac{5}{6^{n-1}}$$

を得る。よって,

$$\begin{cases} b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{5}{6^n} \quad (n \geq 2) \\ b_2 = \frac{5}{6} \end{cases}$$

となる。ここで,

$$6^{n+1}b_{n+1} = 2 \cdot 6^n b_n + 30$$

より, $g_n = 6^n b_n$ とすると

$$\begin{cases} g_{n+1} = 2g_n + 30 \quad (n \geq 2) \\ g_2 = 30 \end{cases}$$

となる。さらに, $h_n = g_{n+1}$ とすると,

$$\begin{cases} h_{n+1} = 2h_n + 30 \quad (n \geq 1) \\ h_1 = 30 \end{cases}$$

を得る。従って,

$$\begin{cases} h_{n+1} + 30 = 2(h_n + 30) \\ h_1 + 30 = 60 \end{cases}$$

より,

$$h_n + 30 = 60 \cdot 2^{n-1}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} h_n &= 30(2^n - 1) \\ g_{n+1} &= 30(2^n - 1) \\ g_n &= 30(2^{n-1} - 1) \\ 6^n b_n &= 30(2^{n-1} - 1) \\ b_n &= \frac{5}{6^{n-1}}(2^{n-1} - 1) \end{aligned}$$

となる。

次に c_n の一般項を求める。

まず, 上の漸化式より 2 つの定数 α, β に対し,

$$\alpha b_n + \beta c_n = \left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta\right) b_{n-1} + \frac{1}{2}\beta c_{n-1} + \frac{5}{6^{n-1}}\alpha \quad (14)$$

が成り立つ。

より簡単な漸化式に帰着させるため, ここで, $\alpha : \beta = (\frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta) : \frac{1}{2}\beta$ とすると,

$$\alpha = 4\beta$$

を得る。これを (14) に代入すると,

$$4\beta b_n + \beta c_n = 2\beta b_{n-1} + \frac{1}{2}\beta c_{n-1} + 20\left(\frac{1}{6^{n-1}}\right)\beta$$

$$4b_n + c_n = \frac{1}{2}(4b_{n-1} + c_{n-1}) + 20\left(\frac{1}{6^{n-1}}\right)$$

となる。

次に, $i_n = 4b_n + c_n$ とすると,

$$i_n = \frac{1}{2}i_{n-1} + 20\left(\frac{1}{6^{n-1}}\right)$$

である。よって,

$$\begin{cases} i_{n+1} = \frac{1}{2}i_n + 20(\frac{1}{6^n}) \quad (n \geq 3) \\ i_3 = \frac{20}{9} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで,

$$6^{n+1}i_{n+1} = 3 \cdot 6^n i_n + 120$$

より, $j_n = 6^n i_n$ とすると,

$$\begin{cases} j_{n+1} = 3j_n + 120 \quad (n \geq 3) \\ j_3 = 480 \end{cases}$$

が成り立つ。さらに, $k_n = j_{n+2}$ とすると,

$$\begin{cases} k_{n+1} = 3k_n + 120 \quad (n \geq 1) \\ k_1 = 480 \end{cases}$$

を得る。従って,

$$\begin{cases} k_{n+1}+60=3(k_n+60) \quad (n\geq 1) \\ k_1+60=540 \end{cases}$$

より,

$$k_n+60=540\cdot 3^{n-1}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} k_n &= 60(3^{n+1}-1) \\ j_{n+2} &= 60(3^{n+1}-1) \\ j_n &= 60(3^{n-1}-1) \\ 6^n i_n &= 60(3^{n-1}-1) \\ i_n &= \frac{10}{6^{n-1}}(3^{n-1}-1) \\ c_n &= i_n-4b_n \\ c_n &= \frac{10}{6^{n-1}}(3^{n-1})-4\frac{5}{6^{n-1}}(2^{n-1}-1) \\ c_n &= \frac{10}{6^{n-1}}(3^{n-1}-2^n+1) \end{aligned}$$

となる。

次に d_n の一般項を求める。

まず, 上の漸化式より 2 つの定数 α,β に対し,

$$\alpha c_n+\beta d_n=\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)c_{n-1}+\frac{2}{3}\beta d_{n-1}+\frac{2}{3}\alpha b_{n-1} \tag{15}$$

が成り立つ。

より簡単な漸化式に帰着させるため，ここで, $\alpha:\beta=(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta):\frac{2}{3}\beta$ とすると,

$$\alpha=3\beta$$

を得る。これを (15) に代入すると,

$$3\beta c_n+\beta d_n=2\beta c_{n-1}+\frac{2}{3}\beta d_{n-1}+2\beta b_{n-1}$$

$$3c_n+d_n=\frac{2}{3}(3c_{n-1}+d_{n-1})+\frac{10}{6^{n-2}}(2^{n-2}-1)$$

となる。

次に, $l_n=3c_n+d_n$ とすると,

$$\begin{cases} l_n=\frac{2}{3}l_{n-1}+\frac{10}{6^{n-2}}(2^{n-2}-1) \quad (n\geq 5) \\ l_4=3c_4+d_4=\frac{70}{6^2} \\ l_5=3c_5+d_5=\frac{350}{6^3} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで,

$$6^n l_n=4\cdot 6^{n-1}l_{n-1}+360(2^{n-2}-1)$$

より, $m_n=6^n l_n$ とすると,

$$\begin{cases} m_n=4m_{n-1}+360(2^{n-2}-1) \quad (n\geq 5) \\ m_4=6^4 l_4=2520 \\ m_5=6^5 l_5=350\cdot 6^2 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで,

$$m_{n+1}-m_n=4(m_n-m_{n-1})+360\cdot 2^{n-2}$$

より,$o_n=m_n-m_{n-1}$ とすると,

$$\begin{cases} o_{n+1}=4o_n+90\cdot 2^n \quad (n\geq 5) \\ o_5=m_5-m_4=280\cdot 6^2 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで,

$$\frac{o_{n+1}}{2^{n+1}}=2\cdot\frac{o_n}{2^n}+45$$

より, $p_n=\frac{o_n}{2^n}$ とすると,

$$\begin{cases} p_{n+1}=2p_n+45 \quad (n\geq 5) \\ p_5=\frac{o_5}{2^5}=315 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで, $q_n=p_{n+4}$ とすると,

$$\begin{cases} q_{n+1}=2q_n+45 \quad (n\geq 1) \\ q_1=315 \end{cases}$$

を得る。従って,

$$\begin{cases} q_{n+1}+45=2(q_n+45) \\ q_1+45=360 \end{cases}$$

より,

$$q_n+45=360\cdot 2^{n-1}$$

となる。よって, (16)

$$
\begin{aligned}
q_n &= 45(2^{n+2}-1)\\
p_{n+4} &= 45(2^{n+2}-1)\\
p_n &= 45(2^{n-2}-1)\\
\frac{o_n}{2^n} &= 45(2^{n-2}-1)\\
o_n &= 45(2^{2n-2}-2^n)\\
m_n - m_{n-1} &= 45(2^{2n-2}-2^n)\\
m_n &= m_4 + \sum_{n=5}^{n}(45\cdot 2^{2n-2} - 45\cdot 2^n)
\end{aligned}
$$

となる。また, $\sum_{n=5}^{n}(45\cdot 2^{2n-2} - 45\cdot 2^n)$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{n}(45\cdot 4^{n-1} - 90\cdot 2^{n-1})\\
&\qquad - \sum_{n=1}^{4}(45\cdot 4^{n-1} - 90\cdot 2^{n-1})\\
&= 45(\tfrac{4^n-1}{3} - 2(2^n-1)) - 45(\tfrac{4^4-1}{3} - 2(2^4-1))\\
&= 15\cdot 4^n - 90\cdot 2^n - 2400
\end{aligned}
$$

となる。よって,

$$
\begin{aligned}
m_n &= 2520 + 15\cdot 4^n - 90\cdot 2^n - 2400\\
m_n &= 60(4^{n-1} - 3\cdot 2^{n-1} + 2)\\
6^n l_n &= 60(4^{n-1} - 3\cdot 2^{n-1} + 2)\\
l_n &= \frac{10(4^{n-1} - 3\cdot 2^{n-1} + 2)}{6^{n-1}}\\
d_n &= l_n - 3c_n\\
d_n &= \frac{10(4^{n-1} - 3\cdot 2^{n-1} + 2)}{6^{n-1}}\\
&\quad - \frac{30(3^{n-1} - 2^n + 1)}{6^{n-1}}\\
d_n &= \frac{10(4^{n-1} - 3^n + 3\cdot 2^{n-1} - 1)}{6^{n-1}}
\end{aligned}
$$

となる。

次に, e_n の一般項を求める。

まず, 上の漸化式より 2 つの定数 α,β に対し,

$$\alpha d_n + \beta e_n = \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta\right) d_{n-1} + \frac{5}{6}\beta e_{n-1} + \frac{1}{2}\alpha c_{n-1}$$

が成り立つ。

より簡単な漸化式に帰着させるため, ここで, $\alpha : \beta = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta : \frac{5}{6}\beta$ とすると,

$$\alpha = 2\beta$$

を得る。これを (16) に代入すると,

$$2\beta d_n + \beta e_n = \frac{5}{3}\beta d_{n-1} + \frac{5}{6}\beta e_{n-1} + \beta c_{n-1}$$

$$2d_n + e_n = \frac{5}{6}(2d_{n-1} + e_n) + \frac{10}{6^{n-2}}(3^{n-2} - 2^{n-1} + 1)$$

となる。

次に, $P_n = 2d_n + e_n$ とすると,

$$
\begin{cases}
P_n = \frac{5}{6}P_{n-1} + \frac{10}{6^{n-2}}(3^{n-2} - 2^{n-1} + 1)(n \geq 6)\\
P_5 = \frac{220}{6^3}\\
P_6 = \frac{1600}{6^4}\\
P_7 = \frac{9800}{6^5}
\end{cases}
$$

が成り立つ。ここで,

$$6^n P_n = 5\cdot 6^{n-1} P_{n-1} + 360(3^{n-2} - 2^{n-1} + 1)$$

より, $Q_n = 6^n P_n$ とすると,

$$
\begin{cases}
Q_n = 5Q_{n-1} + 360(3^{n-2} - 2^{n-1} + 1)(n \geq 6)\\
Q_5 = 6^2\cdot 220\\
Q_6 = 6^2\cdot 1600\\
Q_7 = 6^2\cdot 9800
\end{cases}
$$

が成り立つ。また,

$$Q_{n+1} - Q_n = 5(Q_n - Q_{n-1}) + 80\cdot 3^n - 180\cdot 2^n$$

より, $R_n = Q_n - Qn - 1$ とすると,

$$
\begin{cases}
R_{n+1} = 5Rn + 80\cdot 3^n - 90\cdot 2^{n+1} \quad (n \geq 6)\\
R_6 = 6^2\cdot 1380\\
R_7 = 6^2\cdot 8200
\end{cases}
$$

が成り立つ。さらに,

$$\frac{R_n}{2^{n+1}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{R_n}{2^n} + 40\left(\frac{3}{2}\right)^n - 90$$

より, $S_n = \frac{R_n}{2^n}$ とすると,

$$\begin{cases} S_{n+1} = \frac{5}{2}S_n + 40\left(\frac{3}{2}\right)^n - 90 \quad (n \geq 6) \\ S_6 = 1380 \cdot \frac{6^2}{2^6} \\ S_7 = 4100 \cdot \frac{6^2}{2^6} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{5}{2}(S_n - S_{n-1}) + 20\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

より, $T_n = S_n - S_{n-1}$ とすると,

$$\begin{cases} T_{n+1} = \frac{5}{2}T_n + 20(\frac{3}{2})^{n-1} \quad (n \geq 7) \\ T_7 = 2720 \cdot \frac{6^2}{2^6} \end{cases}$$

が成り立つ。また,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} T_{n+1} = \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} T_n + 20$$

より, $U_n = (\frac{2}{3})^{n-2}T_n$ とすると,

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{5}{3}U_n + 20 \quad (n \geq 7) \\ U_7 = \frac{5440}{3^3} \end{cases}$$

が成り立つ。さらに, $W_n = U_{n+6}$ とすると,

$$\begin{cases} W_{n+1} = \frac{5}{3}U_n + 20 \quad (n \geq 1) \\ W_1 = \frac{5440}{3^3} \end{cases}$$

が成り立つ。従って,

$$\begin{cases} W_{n+1} + 30 = \frac{5}{3}(W_n + 30) \\ W_1 + 30 = \frac{6250}{3^3} \end{cases}$$

より,

$$W_n + 30 = \frac{6250}{3^3}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$$

となる。よって,

$$W_n = \frac{2 \cdot 5^4}{3^2}\left(\frac{5}{3}\right)^n - 30$$

$$U_{n+6} = \frac{2 \cdot 5^4}{3^2}\left(\frac{5}{3}\right)^n - 30$$

$$U_n = \frac{2 \cdot 3^3}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} - 30$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} T_n = \frac{2 \cdot 3^3}{5}\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} - 30$$

$$T_n = \frac{2^2 \cdot 3^2}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - 20\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_n - S_{n-1} = \frac{2^2 \cdot 3^2}{5}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - 20\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$S_n = S_6 + \sum_{k=7}^{n} T_k$$

$$S_n = 1380\left(\frac{6^2}{2^6}\right) + \sum_{k=1}^{n} T_k - \sum_{k=1}^{6} T_k$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} T_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{2}\right)^{k-1} - 20\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{36}{5} \cdot \frac{(\frac{5}{2})^n - 1}{\frac{5}{2} - 1} - 20 \cdot \frac{(\frac{3}{2})^n - 1}{\frac{3}{2} - 1} \\ &= \frac{24}{5}\left((\tfrac{5}{2})^n - 1\right) - 40\left((\tfrac{3}{2})^n - 1\right) \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} S_n = \frac{1380 \cdot 6^2}{2^6} + \frac{24}{5}\left((\tfrac{5}{2})^n - 1\right) - 40\left((\tfrac{3}{2})^n - 1\right) \\ - \frac{24}{5}\left((\tfrac{5}{2})^6 - 1\right) + 40\left((\tfrac{3}{2})^6 - 1\right) \\ = 12(\tfrac{5}{2})^{n-1} - 60(\tfrac{3}{2})^{n-1} + 60 \end{aligned}$$

となる。また,

$$\frac{R_n}{2^n} = 12\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} - 60\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 60$$

$$R_n = 24 \cdot 5^{n-1} - 120 \cdot 3^{n-1} + 120 \cdot 2^{n-1}$$

$$Q_n - Q_{n-1} = 24 \cdot 5^{n-1} - 120 \cdot 3^{n-1} + 120 \cdot 2^{n-1}$$

$$Q_n = Q_5 + \sum_{k=6}^{n} R_k$$

$$Q_n = 6^2 \cdot 220 + \sum_{k=1}^{n} R_k + \sum_{k=1}^{5} R_k$$

である。ここで,

$$\sum_{k=1}^{n} R_k$$
$$= 24\sum_{k=1}^{n} 5^{k-1} - 120\sum_{k=1}^{n} 3^{k-1} + 120\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}$$
$$= 24 \cdot \tfrac{5^n-1}{5-1} - 120 \cdot \tfrac{3^n-1}{3-1} + 120 \cdot \tfrac{2^n-1}{2-1}$$
$$= 6(5^n - 1) - 60(3^n - 1 + 120(2^n - 1)$$

より,

$$Q_n = 6^2 \cdot 220 + 6 \cdot 5^n - 60 \cdot 3^n + 120 \cdot 2^n - 6 \cdot 5^5 + 60 \cdot 3^5 - 120 \cdot 2^5$$
$$Q_n = 6 \cdot 5^n - 60 \cdot 3^n + 120 \cdot 2^n - 90$$
$$P_n = \frac{1}{6^{n-1}}(5^n - 10 \cdot 3^n + 20 \cdot 2^n - 15)$$
$$P_n = \frac{5}{6^{n-1}}(5^{n-1} - 2 \cdot 3^n + 2^{n+2} - 3)$$

となる。

ここで, $e_n = P_n - 2d_n$ より,

$$e_n = \frac{5}{6^{n-1}}(5^{n-1} - 4^n + 2 \cdot 3^n - 2^{n+1} + 1)$$

である。

さらに, $f_n = \frac{1}{6}e_{n-1}$ より,

$$f_n = \frac{5}{6^{n-1}}(5^{n-2} - 4^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} - 2^n + 1)$$

を得る。

ゆえに, (ア) の場合 n 回で 1 から 6 のすべての目が出る確率 $P(X = n)(n \geq 6)$ は

$$P(X = n) = \frac{5}{6^{n-1}}(5^{n-2} - 4^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1} - 2^n + 1)$$

である。

次に, X の期待値を求める。(ア) の場合の X の期待値 $E(X)$ は,

$$E(X) = \sum_{k=6}^{\infty} k\left(\frac{5}{6^{k-1}}(5^{k-2} - 4^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} - 2^k + 1)\right)$$

である。よって,

$$\sum_{k=6}^{\infty} k\left(\frac{5}{6^{k-1}}(5^{k-2} - 4^{k-1} + 2 \cdot 3^{k-1} - 2^k + 1)\right)$$
$$= \sum_{k=6}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \sum_{k=6}^{\infty} 5k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} + \sum_{k=6}^{\infty} 10k\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) - \sum_{k=6}^{\infty} 10k\left(\frac{1}{3^{k-1}}\right) + \sum_{k=6}^{\infty} 5k\left(\frac{1}{6^{k-1}}\right) \tag{17}$$

ここで, (17) の右辺の各項について考える。

(第 1 項)

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \tag{18}$$

なので, $S_s = \sum_{k=1}^{s} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ $(s \geq 1)$ とすると,

$$S_s = \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^s}{\left(1-\frac{5}{6}\right)^2} - \frac{s\left(\frac{5}{6}\right)^s}{1-\frac{5}{6}}$$
$$= 36 - 36(\tfrac{5}{6})^s - 6s(\tfrac{5}{6})^s$$

となる。よって,

$$\lim_{s\to\infty} S_s = 36$$

なので, (18) より,

(第 1 項)

$$= 36 - \left(36 - 36(\tfrac{5}{6})^5 - 30(\tfrac{5}{6})^5\right)$$
$$= 66(\tfrac{5}{6})^5$$

を得る。次に,

(第 2 項)

$$= 5\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right) \tag{19}$$

なので, $T_s = \sum_{k=1}^{s} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ $(s \geq 1)$ とすると,

$$T_s = \frac{1-(\frac{2}{3})^s}{(1-\frac{2}{3})^2} - \frac{s(\frac{2}{3})^s}{1-\frac{2}{3}}$$
$$= 9 - 9(\tfrac{2}{3})^s - 3s(\tfrac{2}{3})^s$$

となる。よって,

$$\lim_{s\to\infty} T_s = 9$$

なので, (19) より,

(第 2 項)
$= 5\left(9-(9-9(\frac{2}{3})^5-15(\frac{2}{3})^5)\right)$
$= 120(\frac{2}{3})^5$
を得る。また,
(第 3 項)

$$= 10\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) - \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right) \quad (20)$$

なので, $U_s = \sum_{k=1}^{s} k\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right) (s \geq 1)$ とすると,
$U_s = \frac{1-(\frac{1}{2^s})}{(1-\frac{1}{2})^2} - \frac{s(\frac{1}{2^s})}{1-\frac{1}{2}}$
$\quad = 4 - 4(\frac{1}{2^s}) - 2s(\frac{1}{2^s})$
となる。よって,

$$\lim_{s\to\infty} U_s = 4$$

なので, (20) より,
(第 3 項)
$= 10\left(4-(4-\frac{4}{2^5}-\frac{10}{2^5})\right)$
$= \frac{140}{2^5}$
を得る。さらに,
(第 4 項)

$$= 10\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{3^{k-1}}\right) - \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{1}{3^{k-1}}\right)\right) \quad (21)$$

なので, $V_s = \sum_{k=1}^{s} k\left(\frac{1}{3^{k-1}}\right) (s \geq 1)$ とすると,
$V_s = \frac{1-\frac{1}{3^s}}{(1-\frac{1}{3})^2} - \frac{s(\frac{1}{3^s})}{1-\frac{1}{3}}$
$\quad = \frac{9}{4} - \frac{9}{4}(\frac{1}{3^s}) - \frac{3}{2}s(\frac{1}{3^s})$
となる。よって,

$$\lim_{s\to\infty} V_s = \frac{9}{4}$$

なので, (21) より,
(第 4 項)
$= 10\left(\frac{9}{4}-(\frac{9}{4}-\frac{9}{4}(\frac{1}{3^5})-\frac{15}{2}(\frac{1}{3^5})\right)$
$= \frac{195}{2}(\frac{1}{3^5})$
を得る。それから,
(第 5 項)

$$= 5\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{6^{k-1}}\right) - \sum_{k=1}^{5} k\left(\frac{1}{6^{k-1}}\right)\right) \quad (22)$$

なので, $W_s = \sum_{k=1}^{s} k\left(\frac{1}{6^{k-1}}\right) (s \geq 1)$ とすると,
$W_s = \frac{1-\frac{1}{6^s}}{(1-\frac{1}{6})^2} - \frac{s(\frac{1}{6^s})}{1-\frac{1}{6}}$
$\quad = \frac{36}{25} - \frac{36}{25}(\frac{1}{6^s}) - \frac{6}{5}s(\frac{1}{6^s})$
となる。よって,

$$\lim_{s\to\infty} W_s = \frac{36}{25}$$

なので, (22) より,
(第 5 項)
$= 5\left(\frac{36}{25}-(\frac{36}{25}-\frac{36}{25}(\frac{1}{6^5})-6(\frac{1}{6^5}))\right)$
$= \frac{186}{5}(\frac{1}{6^5})$
を得る。

よって,(17) より
$E(X)$
$= 66(\frac{5}{6})^5 - 120(\frac{2}{3})^5 + 140(\frac{1}{2^5}) - \frac{195}{2}(\frac{1}{3^5}) + \frac{186}{5}(\frac{1}{6^5})$
$= \frac{147}{10}$

以上より, (ア) の場合の X の期待値は $\frac{147}{10}$ 回である。

(ア), (イ), (ウ) のそれぞれの X の期待値から, このゲームにおいては, 立方体のサイコロを使うより, より少ない回数で 1 から 6 のすべての目を出すサイコロの組み合わせがあるということがわかった。

2.2 題目の設定理由と授業のねらい

前節で示したような期待値の計算は中学生には難しいが，三面サイコロを二つ，あるいは二面サイコロと四面サイコロを一つずつ用いた実験を行えば, 立方体サイコロ一つのときより，X の値が小さくなることは中学生でも予想できると考えた。そこで，実験から得られるデータをもとに，この予想が正しいことを実証する活動を授業の主な題材とすることにした。

また，二面サイコロ，三面サイコロ，四面サイコロを作る過程で，出て欲しくない目が出る立体を作ることも考えられる。この場合，その目が出る確率は出やすい目に比べて小さい値となる。このような同様に確からしくない事象が存在することを経験することで,「同様に確からしい」ということをより理解できると考えた。

以上の理由により，二個のサイコロを用いるゲームを題材とする授業を実践することとした。そして，授業のねらいを次のように設定した。

(1) サイコロを振る回数を減らすために，さまざまな立体を考え，さらにそれを工作用紙で作ることができる。

(2) 立体の形によって，出やすい面と出にくい面があることがわかる。

2.3 授業の流れ

この授業は 3 時間構成である。

＜1 日目 (1 時間目)＞

(1) ゲーム

まず，ゲームの内容やルールを紹介する。本時においては，工作用紙で作った立方体のサイコロを使用する。また，2.1 節で述べたように，このゲームのルールでは 1 人 2 個サイコロを持てるが，本時ではまず立方体のサイコロ 1 個だけを使いゲームをすることにした。立方体のサイコロでは何回振れば 1 から 6 のすべての目を出せるかというデータを集めることを目的とし，グループ内でペアを作り，実際にゲームを行う。ゲームを終えた生徒から，学習プリントに勝敗，最も多い回数，最も少ない回数，平均回数をかく。

(2) 交流・次時の説明

最も少なくて何回で終わったか，最も多くて何回で終わったかを全体で交流する。今回のゲームではサイコロを振る回数を減らすことができれば，勝つ可能性が高まるということを確認する。そして,「できるだけ少ない回数で 1 から 6 の目が出るように，サイコロの形を考えよう。」という次時の課題を提示する。次時はサイコロを振る回数を減らすために各自サイコロを 1 人 2 個は作るということを伝える。ここで，サイコロづくりのルールを提示する。六面体の例として，直方体と五角錐を紹介する。また，面を貼りあわせて作ってもよいということを五角錐を使って説明する。次時までにどんなサイコロを作るか考えてくることを宿題とし本時を終える。

＜2 日目 (2,3 時間目)＞

(1) 課題設定

ゲームの内容とルール，サイコロ作りのルールを確認する。「できるだけ少ない回数で 1 から 6 の目が出るように，サイコロの形を考えよう。」という課題を確認する。前時，立方体サイコロでゲームを行った時の学年全体での平均回数を求めておき，その値を提示し，本時はその値よりも回数を減らすことを目標とすることを伝える。

(2) 個人追究

班ごとにまとまり，サイコロ作りをする。サイコロを 2 個作った生徒から，サイコロを実際に振ってみた結果を実験表に記録していく。記録を数回とり，平均が目標の数値を下回ったかどうかを確認する。下回った生徒は周りの生徒とゲームをしたり，別のサイコロを作ったりする。目標を上回った生徒は，新たにサイコロを作ってみる。

(3) まとめ

いくつかのサイコロを紹介し，出やすい面や出にくい面があることを確認する。サイコロ作りの中でいろいろな立体を作ったことは，中学校 1 年生の「空間の図形」の内容，実際にサイコロを振り，データを集め平均を求めたり，最多や最少を考えたりしたことは，中学校 1 年生の「資料の整理と活用」の内容の活用であることを伝え，このことを今回の授業のまとめとした。

3　実践結果

講座名：「Let's サイコロ game」
場所：白川町立白川中学校
対象：中学2年生
1時間目　実施日：平成23年9月15日（木）
第3,4校時
2, 3時間目　実施日：平成23年9月16日（金）
第3,4校時

3.1　活動の様子

1時間目

(1) ゲーム

ゲームの内容とルールを提示し，実際にゲームを行った。どの生徒もゲームの内容とルールを理解し，楽しくゲームを行うことができていた。1グループを6人とし，1ペアにつき2試合ずつ計10試合を予定していたが，時間の関係でほとんどが10試合は行えなかった。そのため，生徒が平均を求めるところまで到達できなかった。

(2) 交流・次時の説明

このゲームの最小回数である6回でゲームを終えることができた生徒がクラスに1～3人ぐらいいた。また，40回以上サイコロを振った生徒もいた。そこで，全体でサイコロを振る回数を減らすことを確認した後,「できるだけ少ない回数で1から6の目が出るように，サイコロの形を考えよう。」と課題を設定した。また，サイコロづくりのルールも同時に提示した。ここで六面体の例として，面に色を付けた直方体や五角錐を提示した。このように，六面体の具体例を示したことで，課題解決の手がかりとなったようだった。実際，次の時間までにどんなサイコロを作るかを考えてくることを宿題プリントとして配布したが，さっそく図や言葉でどんなサイコロを作るかをかいている生徒がいた。

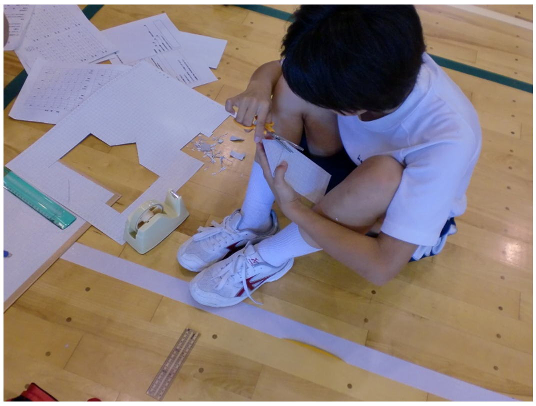
2時間目

(1) 課題設定

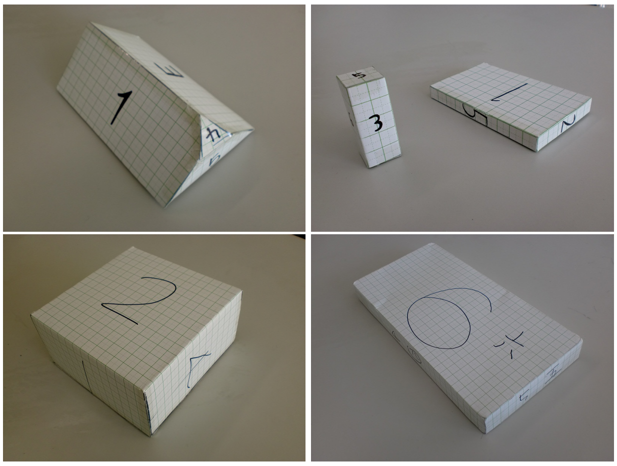
ゲームの内容とルール，サイコロ作りのルールを確認した。前時の立方体サイコロでのゲームの平均回数が15.09回になったため，これを下回ることを今回の目標として提示した。

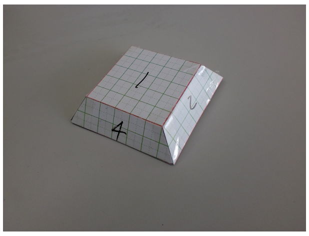
(2) 個人追究

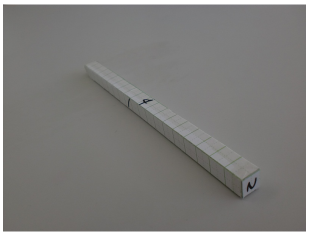
それぞれグループに分かれて，サイコロ作りを行った。



生徒が製作したサイコロには以下のようなものがあった。







ほとんどの生徒が自分の作ったサイコロを使うことで，サイコロを振る回数を目標値より少なくすることができていた。

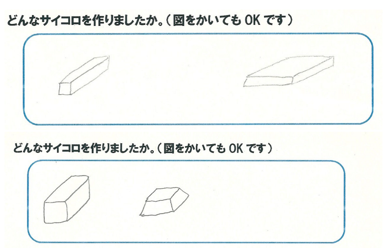
(3) まとめ

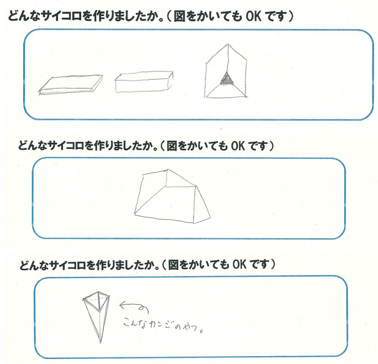
サイコロの形によって出やすい面や出にくい面があることを確認した。中学校 1 年生の「空間の図形」の内容,「資料の整理と活用」の内容の活用であることを伝え，このことを今回の授業のまとめとする。

4．考察

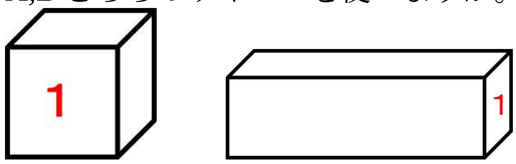
授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

1. ゲームのルールは理解できましたか。
   - はい 46 名
   - いいえ 0 名
2. 立方体サイコロと比べてサイコロを振る回数は減らせましたか。
   - はい 39 名
   - いいえ 3 名
   - その他 4 名
3. どんなサイコロを作りましたか。(図をかいても OK です。)





4. 1 の目が出たら賞品が当たります。次の A,B どちらのサイコロを使いますか。



A 立方体　　B 直方体

- A 立方体 38 名
- B 直方体 1 名

5. 感想を自由に書いてください。
   - 楽しかった。
   - またやりたい。
   - たくさんのサイコロを作れた。
   - いろいろな形のサイコロを作れて,面白かった。
   - 展開図をかいたり,作ったりできて,楽しかった。
   - サイコロの形を変えるだけで,回数を減らせて楽しかった。
   - サイコロを作るのが難しかった。
   - サイコロの形や数字の位置を考えて作れた。
   - なるほどと思う形があった。
   - どんなサイコロの形が 1,2,3 が出やすいかなどのことがわかった。

- 中に何も入れてはいけないというルールがないので,おもりを入れてみた。
- 資料をうまく使って勉強していきたい。

本授業のねらい (1)(2) の達成度について考察する。

(1) について

さまざまな形や大きさのサイコロを作ることができていた。活動を始めた段階では，イメージはもてていても，実際に作るとなると手が止まってしまう生徒もいたが,「とりあえず作ってみて，足りない部分は貼りあわせてもいいから」などとアドバイスをすることによって，時間内にサイコロを１人２個は作ることができた。また，１人２個にとどまらず，1 人で 3 個，4 個，それ以上作っている生徒も多くいた。自分が作ったサイコロを実際に振ってみて，回数を減らせそうなサイコロを作ろうとする生徒も多く見られた。このことから，回数を減らすために，さまざまな立体を考え，さらにそれを工作用紙で作ることができていたと考えられる。

(2) について

広い面のほうが出やすい，細長いとこの面は出にくいなど，立体の形と面の出やすさには関係があるということを意識してサイコロを作っていた。「このサイコロでは，どの面が出やすいの」と問うと，生徒は「この面とこの面が出やすい」などと説明することもできていた。アンケートのどんなサイコロを作ったのかの回答を見ても，２つのサイコロの組み合わせはそれぞれの面の出やすさを考えて作ったことがわかる。アンケートの立方体と直方体に関する問に対し，多くの生徒が立方体を答えていることからも，生徒が一つのサイコロの中でも出やすい面と出にくい面があることを理解できていると考える。このことから，出やすい面と出にくい面があることがわかるというねらいは達成できたと考える。

5．今後の課題

一つ目は，サイコロの形や組み合わせについてである。今回は，教材開発の過程において，立方体サイコロ，二面サイコロと四面サイコロ，三面サイコロと三面サイコロの期待値を求めた。しかし，例えば，四面サイコロと三面サイコロの組み合わせの期待値はいくつか，確率が一定でないサイコロではどうかなどのように，まだまだ多くのサイコロやサイコロの組み合わせを考えることができる。今回の実践では，実際に振ってみて回数が減るかどうかを調べたが，生徒がいろいろな組み合わせを考えたときに，授業者としてはあらかじめそのサイコロで回数を減らすことができるかを知っておいたほうがいいと考える。そのため，より多くの場合の X の期待値について，これから考えていきたい。

二つ目は，学習内容とのつながりを考えることである。今回の題材では，サイコロ作りは立体の学習とつながりがある。平均値の計算やデータ集めは資料の整理と活用，面の出やすさは確率の学習とつながりがある。実践では扱わなかったが，期待値の計算は高校数学とつながっている。今回の題材にはまだまだ多くの学習内容とつながりがあるので，どの学習内容とつながりがあるかを考え，そのつながりを意識して，どのような児童・生徒を対象としてこの題材を扱うことができるのかまで考えていきたい。

今回の教材開発をもとに，今後も算数・数学は楽しいと思える児童・生徒が増えるような教材を考えていきたい。

引用文献

[１] 文部科学省，2008，中学校学習指導要領解説数学編，教育出版株式会社.
[２] 愛木豊彦，岩田恵司，山田雅博，第１章授

業実践報告（小学校），平成 18 年ノビルサー夏季講座実施報告書.
[３] 愛木豊彦，松野利香，統計領域における算数活動を取り入れた授業方法の研究，2006 年度，第 10 回数学教育学会大学院生部会発表論文集，5-8.

白川中学校学習指導案

単元名「Let's　サイコロ game」

日時	平成 23 年 9 月 15 日
場所	白川中学校
学年	2 年生
授業者	浅井寛隆

ねらい：①サイコロを振る回数を減らすために，さまざまな立体を考え，さらにそれを工作用紙で作ることができる。
②立体の形によって，出やすい面と出にくい面があることがわかる。

<table>
<tr><th></th><th>ねらい</th><th>学習活動</th><th>指導・援助</th></tr>
<tr><td>導入</td><td>○ゲームのやり方を理解する。</td><td>○ゲームの説明
【ゲーム内容】
サイコロを振って，先に 1 から 6 のすべての目を出したほうが勝ち
※サイコロは１人２個持つことができ，ゲーム中に自由に交換できる
※出た目は下になった面の数字とする
・二人一組で対戦
・立方体のサイコロを使う
・学習プリントに出た目と回数を記録する
（勝敗が決まっても 1 から 6 のすべての目が出るまでサイコロを振る）</td><td>・全体の前で立方体のサイコロを使ってゲームをし，ゲームのやり方や記録のとり方を説明する。</td></tr>
<tr><td>展開</td><td>○実際にゲームを行い，立方体サイコロの時のデータを集める。</td><td>○実際にゲームを行う。<table><tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>勝敗・合計</td></tr><tr><td>出た目</td><td>○</td><td></td><td></td><td>○</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>回数</td><td>正</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>・グループ内でペアを変えながら行う（奇数人数の班は大学生が加わる）
・2試合ずつ行う
・ゲームが終わったら，最も少ない回数・回数の平均・最も多い回数を求める</td><td>・ゲームのやり方や記録のとり方ができているかを確認する。

・ゲームを終えた人には，最も少ない回数・最も多い回数・回数の平均を求めさせる。</td></tr>
<tr><td>まとめ</td><td>○内容の説明を聞き，次回の学習への見通しを持つ。</td><td>○まとめ
・最少，最多何回でゲームを終えることができたかを全体で確認する。
○次回の説明
・立方体のサイコロより回数を減らすには，どのようなサイコロを作ればいいかを考える
○サイコロづくりの約束をする。
①工作用紙で作る　②六面体であること
③１から 6までの数字を，１つの面に１つずつ数字をかく
④展開図が難しい時は，面を貼りあわせて作ってよい
○サイコロを考える。
・宿題プリントを配る。</td><td>・勝つためには，サイコロを振る回数を減らせばよいことを確認する。
・いくつかの立体を示し，六面体について説明する。
・次回の内容を説明し，どんなサイコロを作るかを考えさせる。</td></tr>
</table>

白川中学校学習指導案
単元名「Let's サイコロ game」

日時	平成 23 年 9 月 16 日
場所	白川中学校
学年	２年生
授業者	浅井寛隆

	ねらい	学習活動	指導・援助
導入	○ゲームのルールと立体づくりの約束を確認し，どんな立体を作ろうか見通しを持つことができる。	○ゲームのルールを確認する。 ○立体づくりにおける約束を確認する。 ○立方体サイコロの時の回数の平均を紹介する。 ・この回数より少ない回数で１から６までの目が出るサイコロを作ることを確認する。	・ゲームに勝つためにはサイコロを振る回数を少なくすればよいことを確認する。
展開	○実験を通して，六面体の形によっては出やすい目と出にくい目があることに気付く。 ○立方体の時より，振る回数を減らせることがわかる。	できるだけ少ない回数で 1から 6の目が出るように，サイコロの形を考えよう。 ○六面体を作る ・立方体 ・直方体→（二面しか出ない直方体，四面しか出ない直方体，六面すべて出る可能性がある直方体） ・底面が台形の四角柱　・平行六面体　・五角錐 ・四角錐を切断　・三角柱を切断 ○作った六面体で実験 ・実験プリントを配布し，出た目や回数などを記録し，自分の作った六面体について考察する。 （サイコロの目を書き直す，新たなサイコロを作るなど） ○ゲーム ・２人１組のペアを作り，ゲームをする。（グループ内でペアを作り行う。大学生は立方体サイコロで参加） ・ゲームでは，勝負がついた後でも 1から 6 のすべての目が出るまでサイコロを振り続ける。 ・1から 6 の出た目と、すべての目が出るまでの回数を記録する。	・立体づくりで手が止まっている生徒に対しては，作りたい立体のイメージを聞く。展開図がかけそうであれば，立方体の展開図などをもとに作る。展開図がかけそうでないときは，一面一面を作っていき，貼りあわせる形で六面体をつくる。 ・各自の実験では，サイコロの目は鉛筆などでかき，後で書き直しができるようにする。 ・２つできた生徒に対しては，よりよいサイコロはないかを考えさせ，新たなサイコロを作るように促す。 ・立方体サイコロのときと比べて，自分のサイコロはどうかを考えながらゲームを行う。
まとめ	○目の出やすさは実験データをもとに，立体の形によって変わることが理解できる。	○まとめ ・立方体サイコロより回数を減らすことができたかを全体で確認する。 ・回数が減るかどうか，出やすい目，出にくい目は実験を繰り返し行い，データを集めることで判断できる。 ・立方体、二面＋四面、三面＋三面でそれぞれ〇〇回実験を行った時の平均を紹介する。 ・アンケート	・いくつかのサイコロを示し，どの目が出やすいかを問う。