岐阜数学教育研究
2011, Vol. 10, 36-49

「いろいろな事象と関数」における教材の提案

中牧卓也[1]，愛木豊彦 [1]，畑中裕史[2]，

平成 24 年 4 月から全面実施される学習指導要領中学校数学科の関数領域に，中学 3 年で学習する内容として「いろいろな事象と関数」が新規に追加された。本論文ではこの内容に対応する光の照度を題材とした教材を提案する。ここでは，光の照度について解説した後，授業内容を示し，実践の結果を報告する。
＜キーワード＞照度，2 乗に反比例する関数，相似，円すい

1．はじめに

平成 24 年 4 月から全面実施される学習指導要領中学校数学科の関数領域に，中学 3 年で学習する内容として,「いろいろな事象と関数」が新規に追加された。中学校学習指導要領解説，数学編（[1]）p.25 によると,「いろいろな事象の中には，これまでに学習したものとは異なる関数関係があることを理解し，関数関係を見い出し考察し表現する能力を伸ばす。」とある。また，同じく [1]p.126 では「第 3 学年では，これまでの学習の上に立って，比例，反比例，一次関数，関数 $y = ax^2$ とは異なる関数関係について指導する。例えば，交通機関や郵便物の料金の仕組を取り上げ，二つの数量の関係を式で表すことが困難な場合であっても，これまで学習してきた表やグラフを用いて変化や対応の様子を調べ，その特徴を明らかにすることができる。」と述べている。さらに [1]p.132 でこの内容に対する指導が数学的活動の例としてふれられている。詳しく述べると「数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし筋道を立てて説明し伝え合う活動」の一つとして,「いろいろな事象の中にある関数関係を見い出し，その変化や対応の特徴を説明する活動」をあげ，その具体例として，2 種類の郵送方法の重さと料金の関係の指導について言及している。そこでは郵送方法の重さと料金の関係を表す階段関数のグラフも載せている。このような式で扱うことのできない階段関数が具体例としてあげられていることに対し，疑問を感じたので，より内容のねらいを実現できるような教材を開発しようと考えた。この動機を受け，本論文では，光の照度について考察する授業を提案する。光の照度は光源からの距離の 2 乗に反比例し，過去に教科書でも取り上げられている ([2])。本論文では後で詳しく述べるように，実験結果をまとめた表やグラフから照度が光源からの距離の 2 乗に反比例していることを導き，それが正しいことを相似を利用して証明するという展開の授業を提案する。この題材により,「数学的表現を用いて根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動」が実現できるものと考えている。

本論文では 2 節で照度について解説し，3 節で授業の計画を示す。

2 授業の概要

2.1. 照度について

授業の題材は光の明るさである。光の明るさを表す数値として，照らしている光源自体の明るさと照らされている面 (以降、照射面と呼ぶ) の明るさを表すものがある。前者は

[1]岐阜大学教育学部
[2]岐阜大学教育学部附属中学校

光度，後者は照度と呼ばれている。光度の単位はcd(カンデラ)，照度の単位はlux(ルクス)である。両方の単位に共通することは値が0以上であり，値が大きいほど明るいことを示すことである。光度は光源によってのみ値が定まるが，照度は光源からの距離によって値が変わっていく。この照度は「照度計」を使って値を測定することができる。

写真 1　照度計

写真 1 において白く丸い部分が明るさを感知する場所である。この白い部分に光が当たり，照度を測定することができる。

照度と距離の関係を確かめるために照度計を使って実験をした。その結果をまとめたものが表 1 である。この関係を調べる際には，他の光源の影響を排除するために部屋を真っ暗(照度が 0 の状態）にしなければならない。

距離 x（m）	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
照度 y（lux）	4300	2200	1492	1040	740	562	448	350
$x^2 \times y$	387	352	373	374	363	360	363	350

表 1

表 1 から x^2y の値がほぼ一定になっていることがわかる。

2.2. 照度と光源からの距離との関係

照度と光源からの距離との関係を考えるために，点光源から発せられる光は，次の 3 つの性質をもつものとする (図 1 参照)。これらの性質を性質 1 とする。

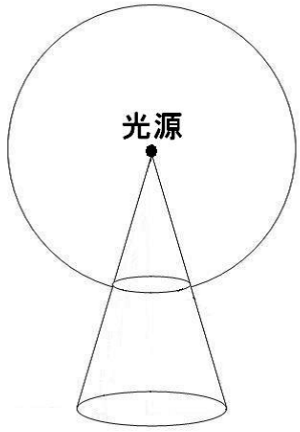


図 1

1-1 光源から発せられる光が通る形は円すいである

1-2 同じ光源で照らされた 2 つの平面において，2 つの平面が平行ならば，2 つの面に入射する光束は等しい

1-3 光源から等距離にある面積の等しい領域に入射する光束は等しい

入射光束について簡単に説明する。そもそも光とは目には見えない光線が多く集まってできたものである。照射面への入射光束とは，照射面に入射する単位時間あたりのすべての光線の量である。このような性質を用いて照度と光源からの距離の関係について考える。

照度は次のように定められている。

$$\text{照度} = \frac{\text{照射面への入射光束}}{\text{照射面の面積}} \tag{1}$$

照度計もこの定義をもとに，照度を測定している。つまり，照度計の測定部分に入射した光束をその照度計の面積で割っているのである。この公式から，入射光束が大きいほう

が大きく，また照射面の面積が大きいほど照度は小さくなることがわかる。

ここで，照度と光源からの距離との関係を明らかにしていく。下の図2において円すいの底面を照度計の測定部分とする。円すいの底面の面積を固定し，測定部分から光源までの距離を変えると半径1の球と円錐の交わった曲面 S の面積 $|S|$ が変わっていく。この面積 $|S|$ が大きいほど照度計に入射する光線の量，つまり入射光束が増える。よってこの面積 $|S|$ で入射光束の量を表すことにする。以下，照度計と光源との距離 h と面積 $|S|$ との関係を求めることにする。

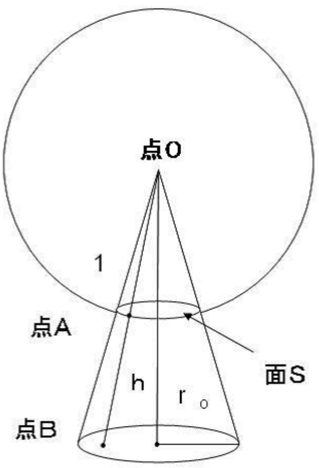


図 2

半径が1である球において，円すい (高さ $h > 1$) と球面が交わった曲面の面積 $|S|$ を求める。ここで，原点を球の中心，z 軸を円すいの回転軸で，z 軸の正の向きを円すいの頂点から底面に向かう向きとする。円すいの底面の半径を $r_0(r_0 > 0)$ とする。ここで円すいの底面上の点Bを $(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ h)(0 < r < r_0)$ とすると，線分 OB 上の点Aを $t(r\cos\theta, r\sin\theta, h)(0 < t < 1)$ と表すことができる。点Aが球の表面上にあるとすると，原点からの距離が1である。よって

$$\begin{aligned} t^2r^2\cos^2\theta + t^2r^2\sin^2\theta + t^2h^2 &= 1, \\ t^2r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + t^2h^2 &= 1, \\ t^2r^2 + t^2h^2 &= 1, \\ t^2(r^2 + h^2) &= 1, \\ t^2 &= \frac{1}{r^2 + h^2}. \end{aligned}$$

したがって，この面S上の点は

$$X = \left(\frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2+h^2}}, \frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2+h^2}}, \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)$$
$$(0 < r < r_0,\ 0 \le \theta \le 2\pi)$$

と表すことができる。X をθ で微分すると，

$$X_\theta = \left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right) = \left(\frac{-r\sin\theta}{\sqrt{r^2+h^2}}, \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2+h^2}}, 0\right).$$

また，X を r で微分すると，

$$\begin{aligned} X_r &= \left(\frac{\partial X}{\partial r}\right) \\ &= \frac{(h^2\cos\theta,\ h^2\sin\theta,\ -hr)}{(r^2+h^2)\sqrt{r^2+h^2}}. \end{aligned}$$

ここで，E, F, G をそれぞれ $X_\theta X_\theta, X_r X_r, X_\theta X_r$ とおくと，

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)^2 + \left(\frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2+h^2}}\right)^2 \\ &= \frac{r^2}{r^2+h^2}, \\ G &= \frac{h^4\cos^2\theta}{(r^2+h^2)^3} + \frac{h^4\sin^2\theta}{(r^2+h^2)^3} + \frac{h^2r^2}{(r^2+h^2)^3} \\ &= \frac{h^4 + h^2r^2}{(r^2+h^2)^3} \\ &= \frac{h^2(h^2+r^2)}{(r^2+h^2)^3} \\ &= \frac{h^2}{(r^2+h^2)^2}, \\ F &= \frac{-rh^2\sin\theta\cos\theta}{(r^2+h^2)^2} + \frac{rh^2\sin\theta\cos\theta}{(r^2+h^2)^2} + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから [3] より求める面積 $|S|$ は

$$
\begin{aligned}
|S| &= \iint_D 1\,dD \\
&(D=\{(\theta,r)|0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le r_0\}) \\
&= \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} 1\,dD \\
&= \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \sqrt{EG-F^2}\,d\theta dr \\
&= \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{r^2h^2}{(r^2+h^2)^3}}\,d\theta dr \\
&= \int_0^{r_0}\left[\theta\sqrt{\frac{r^2h^2}{(r^2+h^2)^3}}\right]_0^{2\pi} dr \\
&= 2\pi\int_0^{r_0}\sqrt{\frac{r^2h^2}{(r^2+h^2)^3}}\,dr.
\end{aligned}
$$

さらに，$f(r_0) = 2\pi\displaystyle\int_0^{r_0}\sqrt{\frac{r^2h^2}{(r^2+h^2)^3}}\,dr$ とおく。

ここで，$r = h\tan\theta$ とおくと，

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{\cos^2\theta}$$

であり，変数の積分範囲は以下のようになる。

r	0	$\to$	r_0
θ	0	$\to$	α

ここで，$\tan\alpha = \dfrac{r_0}{h}$ である。$\tan\alpha > 0$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ である。

$$
\begin{aligned}
f(r_0) &= 2\pi\int_0^{\alpha}\sqrt{\frac{h^2\tan^2\theta\cdot h^2}{(h^2\tan^2\theta+h^2)^3}}\cdot\frac{h}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\alpha}\sqrt{\frac{h^4\tan^2\theta}{h^6(\tan^2\theta+1)^3}}\cdot\frac{h}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\alpha}\sqrt{\frac{\tan^2\theta\cos^6\theta}{h^2}}\cdot\frac{h}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\alpha}\frac{1}{h}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos^6\theta}\cdot\frac{h}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\alpha}\sqrt{\sin^2\theta\cos^4\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\alpha}\sqrt{\sin^2\theta}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\alpha}\sqrt{\sin^2\theta}\,d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\alpha}\sin\theta\,d\theta \\
&= 2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\alpha} \\
&= 2\pi(1-\cos\alpha) \\
&= 2\pi\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+{r_0}^2}}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{\sqrt{h^2+{r_0}^2}-h}{\sqrt{h^2+{r_0}^2}}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{(\sqrt{h^2+{r_0}^2}-h)(\sqrt{h^2+{r_0}^2}+h)}{(\sqrt{h^2+{r_0}^2})(\sqrt{h^2+{r_0}^2}+h)}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{h^2+{r_0}^2-h^2}{(\sqrt{h^2+{r_0}^2})(\sqrt{h^2+{r_0}^2}+h)}\right) \\
&= 2\pi\left(\frac{{r_0}^2}{(\sqrt{h^2+{r_0}^2})(\sqrt{h^2+{r_0}^2}+h)}\right) \\
&= \frac{2\pi{r_0}^2}{h^2}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{{r_0}^2}{h^2}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{{r_0}^2}{h^2}}\right)}.
\end{aligned}
$$

実際の測定において，$\dfrac{r_0}{h} \fallingdotseq 0$ であるので，

$$
\begin{aligned}
f(r_0) &\fallingdotseq \frac{2\pi{r_0}^2}{h^2}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{1+0}\right)(1+\sqrt{1+0})} \\
&= \frac{\pi{r_0}^2}{h^2}.
\end{aligned}
$$

よって照度は距離の 2 乗にほぼ反比例するということがわかった。また面 S は半径 $\dfrac{r_0}{h}$ の円にほぼ等しいと考えられる。

2.3. 2 乗に反比例する関数

y が x の 2 乗に反比例するとき，つまり，$y=\frac{a}{x^2}$ （a は比例定数）と表されるとき，x と y には次のことが成り立つ。

- x の値の 2 乗とその x に対応した y の値の積が一定である。
- x の値を 2 倍，3 倍 ⋯ するとそれにともなって，y の値が $\frac{1}{4}$ 倍，$\frac{1}{9}$ 倍 ⋯ になる。

3. 授業の概要

2 節で述べた内容をもとに以下の授業を開発した。

3.1 授業のねらい

本教材のねらいを以下のようにした。

(a) 既習の関数の性質を用いて，新たな関数の性質を見つけることができる。

(b) 関数領域と図形領域を関連付けることで，関数の式の意味を理解できる。

(a) について　距離と照度の値をまとめた表やグラフから，既習の関数である反比例の性質をもとに考えることで，2 乗に反比例するという関数関係を見つけていく。その活動を通して，数学における既習事項の有用性を実感してもらう意図がある。

(b) について　距離と照度の間には 2 乗に反比例するという関係がある。その背景には相似の性質などがあることを理解していく。その活動を通して，数式には意味があることを再確認し，それを追究していくことの必要性を実感してもらう意図がある。

3.2 展開

授業の詳しい計画は指導案（資料 1）で示したので，ここでは簡単に説明する。

1 時間目

(1) 問題提示

まず光の明るさを，照度計を用いて数値化できることを生徒たちに伝える。そして，実際に生徒たちの前で照度計を使い照度を測定し，光源との距離によって照度が変わっていくことを確認する。ここで，生徒たちに「距離と照度の間にはどんな関係があるか」という問題を提示する。

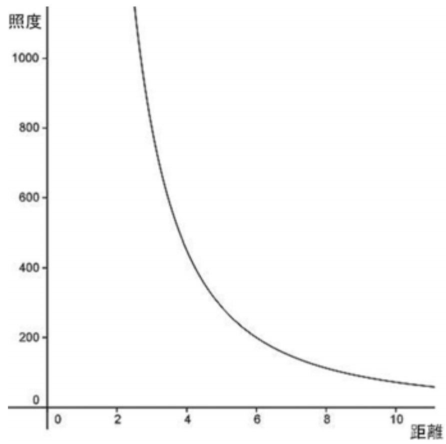
(2) 課題提示

次に，距離 x と照度 y の関係表 (表 2) を提示する。実験の値をまとめた表 1 では，x^2y の値を一定と見ることが難しいと考えたので，表 2 のような，理想化したものを提示することにした。

距離 x（m）	1	2	3	4	5	6	⋯	10
照度 y（lux）	7200	1800	800	450	288	200	⋯	72
$x^2\times y$	7200	7200	7200	7200	7200	7200	⋯	7200

表 2

さらに，下のグラフも表とともに提示する。



グラフ

表 2 から，未習である 2 乗に反比例する関数を導くのは困難であると考え，グラフも与えることにした。その理由は，このグラフは原点を通らない曲線で x 軸と y 軸が漸近線であるなど，反比例のグラフに近い。そこで表 2 に反比例の関係にあるのかをたずねる。それとともに反比例の定義と性質を提示する。

- 式は $y=\dfrac{a}{x}$ である。(a は比例定数)
- x の値を 2 倍，3 倍⋯ するとそれにともなって，y の値が $\dfrac{1}{2}$ 倍，$\dfrac{1}{3}$ 倍⋯ になる。
- x の値とその x に対応した y の値の積が一定である。

この 3 つを提示してから，課題として「表 2 と反比例の性質 3 つとを比べて，この表 2 の関数の関係を式で表そう。」という課題を提示して個人追究に進む。

(3) 個人追究

学習プリント 1(資料 2) を使って個人追究を行う。考えが進まない子には，まず式ではなく表の性質に着目させ,「x の値を 2 倍するとそれにともなって y の値はどうなっているか」と促す。

(4) 全体交流・まとめ

反比例の性質と表 2 を比べて，距離 x と照度 y の関係には以下のような性質があることを確認する。

- x の値の 2 乗とその x に対応した y の値の積が一定である。
- x の値を 2 倍，3 倍，⋯ するとそれにともなって，y の値が $\dfrac{1}{4}$ 倍,$\dfrac{1}{9}$ 倍，⋯ になる。
- 式は $y=\dfrac{a}{x^2}$(もしくは $y=\dfrac{7200}{x^2}$) と表すことができる。(a は比例定数)

交流後,「x と y の関係を表す式が $y=\dfrac{a}{x^2}$ と表されるとき,『y は x の 2 乗に反比例する』という。よって，照度は距離の 2 乗に反比例する。」とまとめる。「既習の反比例の性質と比べることで,『y は x の 2 乗に反比例する』という新しい関数の性質を導くことができる」ということを確認し，既習事項の有用性を強調する。そして，なぜ照度は距離の 2 乗に反比例しているのかという疑問を残して，1 時間目を終える。

2 時間目

(1) 問題提示

前回の授業で,「照度は距離の 2 乗に反比例している」という性質は表やグラフから導いただけで，理由が明らかになっていないことを確認する。そして,「照度が距離の 2 乗に反比例する理由を考えよう」という問題を提示する。

(2) 課題提示

この問題を解決するために必要な光の性質（性質 2 と呼ぶ）と照度の公式 (1) を提示する。性質 2 はこの問題解決のために，性質 1 を簡単にしたものである。

2-1 光源から発せられる光が通る形は円すいである

2-2 同じ光源で照らされた 2 つの平面において，2 つの平面が平行ならば，2 つの面に入射する光の量は等しい

2-3 2 つの照射面において，光の量が等しければ照射面が広い方が暗い

性質 2 と照度の公式の意味を理解することを目的として，次の例題を解く。

例題
光源によって照らされた面アの面積が 100，照度が 10 である。同じ光源によって照らされた平行な面イの面積が 200 のとき，面イの照度を求めよう。

それから下の図 3 を提示する。

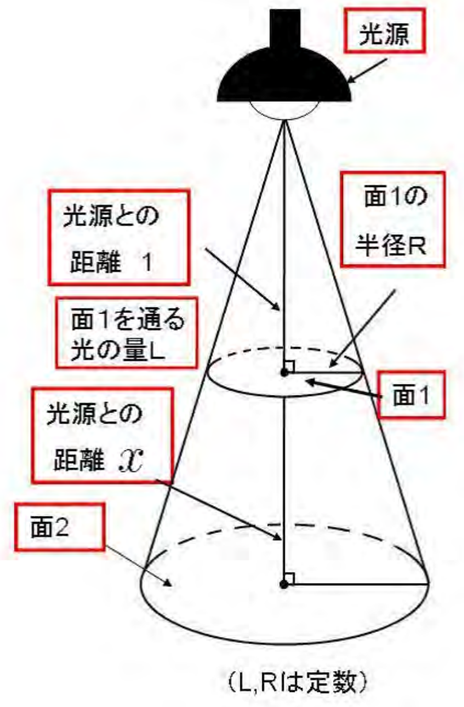


図 3

ここで，面 1 と面 2 は平行な面である。

このとき，光源からの距離が x である面 2 の照度を求め，照度が距離の 2 乗に反比例する理由を考えよう，という課題を提示する。

(3) 個人追究

学習プリント 2(資料 3) を使って個人追究を行う。まず，面 2 の半径 R_0 を求める。そのために円すいの断面図 (図 4) から相似な三角形を見つける。

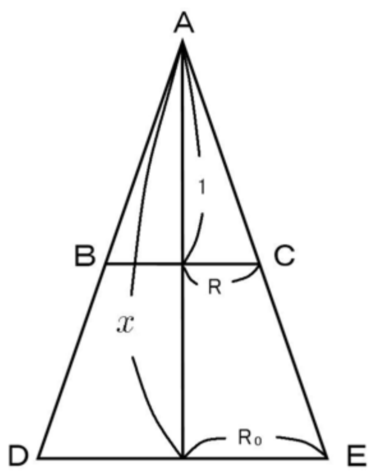


図 4

△ABC と △ADE において問題の仮定より BC と DE が平行である。よって，同位角が等しいので，∠ABC= ∠ADE, ∠ACB= ∠AED となる。2 組の角がそれぞれ等しいので △ ABC ∽ △ ADE となる。よって対応する辺の比が等しいので，$R : 1 = R_0 : x$ である。ここから $R_0 = Rx$ となり，面 2 の半径が Rx となることがわかる。従って，照度の公式 (1) より，面 2 の照度 y は $y = \dfrac{L}{\pi(Rx)^2}$ となる。

面 2 の照度を求め終わった生徒には，前回の式 $y = \dfrac{a}{x^2}$ と求めた面 2 の照度を比べるよう促す。L も R も定数であるから，面 2 の照度において，$a = \dfrac{L}{\pi R^2}$ とおくと，$y = \dfrac{a}{x^2}$ と表せることがわかる。

ここで，3 節で示したこととの違いについて述べる。3 節では，光源から発する光の形である円すいの軸に沿って，測定面を光源から遠ざけていったとき，測定面での照度が光源からの距離の 2 乗に近似的に反比例することを示した。ただし，測定面は十分に小さいものと考えている。

これに対し，ここでは円すいの底面全体の照度を考えている。従って，これは照度計で求められる値とは一致しない。しかし，3 節で示した内容を中学生が扱うのは無理なので，このような設定にした。

(4) 全体交流・まとめ

まず，面 2 の照度の求め方を交流する。円すいの断面図を二等辺三角形として見ることができたか，相似な三角形を見つけることができたか，相似から比の性質を使って面 2 の半径を求めたか，と確認していく。その後，今回求めた面 2 の照度と，前回求めた距離と照度の式との関係についての意見を交流していく。

交流後,「照度が距離の 2 乗に反比例するのは，光の性質や照度の公式によって求めた照度から現れた性質である。関数の関係式にも意味がある。」というまとめをする。そして 1 時間目では x が正のときのみのグラフしか見

せていないので，最後に定義域が負の数を含む場合のグラフを提示し，y 軸対称になっていることを確認する。

4 活動の様子

3 節で示した授業案を以下のように実践した。

題材名	「光が数字になっちゃった !! 」
実践日	平成 23 年 2 月 28 日 (月) 第 2 校時
	平成 23 年 3 月 1 日 (火) 第 1 校時
場所	岐阜大学教育学部附属中学校
対象	中学 3 年生
時間数	全 2 時間

1 時間目

(1) 個人追究

課題を提示した後，多くの生徒が x の値を 2 倍，3 倍させて，それに対応して y の値がどのように変化しているかに注目していた。その結果，反比例ではないことに多くの生徒が気付いていた。この段階で x と y の関係を表す式 $y=\dfrac{7200}{x^2}$ を推測で求めている生徒もいた。そのような生徒は，式を求めてから，x^2y の値が一定であり，この式が正しいことを確認していた。また，既習の反比例のように x^2y の値が一定であることから，式を求めていく生徒もいた。

机間指導において，既習の考え方，推測してからその式が正しいことを確かめる考え方のどちらも数学では大切な考えなので，どちらの意見にも価値付けをした。また生徒の中にすでに「y は x の 2 乗に反比例している」という言葉を書いている生徒もいた。

(2) 全体交流

「x の値を 2 倍，3 倍，$\cdots$ するとそれにともなって，y の値が $\dfrac{1}{4}$ 倍，$\dfrac{1}{9}$ 倍，$\cdots$ になる。」という意見を発表させた後，式の 2 つの求め方を発表させた。

2 時間目

(1) 個人追究

課題を提示した後，多くの生徒が照度を x を使って表すために面 2 の半径を求めていた。その中で，手が止まっている生徒には円すいの断面図を考えるように支援した。

面 2 の半径を求めるために三角形の相似を使わなければならないのだが，その証明を省略している生徒もいた。そのような生徒には，本当に相似かどうかを質問し，きちんと相似の証明を書くように指導した。

面 2 の面積を求めるにあたり，円の面積の公式を用いる生徒もいれば，すべての円は相似であることから面積比を使う生徒もいた。考え方はさまざまだが，面 2 の照度を多くの生徒が求めることができていた。その反面，前回の式と今回求めた照度を関係付ける生徒が少なかった。ただ一部の生徒が面 1 の半径 R と光の量 L が定数であるから $a=\dfrac{L}{\pi R^2}$ とすれば，$y=\dfrac{a}{x^2}$ と表されると答えていた。

2) 全体交流

まず，面 2 の照度を x を用いて表すところまで発表させた。その発表では，三角形が相似である証明も正確にできていた。その後，前回の式と関連付けて考えていた意見が発表したので，距離 x と照度 y の関係を表す式 $y=\dfrac{a}{x^2}$ の根拠を全体で確認することができた。

5. 授業に対する考察

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

(1) 1 時間目で，光源からの距離と照度の関係の式を自分で見つけることができましたか。

- はい （30 人）
- いいえ （10 人）

どのようにしてその式を見つけましたか

- 表から x の値を 2 倍，3 倍，$\cdots$ すると，y の値が $\frac{1}{4}$ 倍，$\frac{1}{9}$ 倍，$\cdots$ になることを見つけた。
- 表，グラフ，公式をもとにした。
- x^2y の値が一定であるから。
- 反比例の式や性質から。
- 勘。

(2) 照度が光源からの距離の 2 乗に反比例することを理解できましたか。

- はい　（37 人）
- いいえ　（ 3 人）

それは表からですか。それとも相似を使った証明からですか。両方ですか。

- 表から　（ 0 人）
- 証明から　（22 人）
- 両方　（15 人）

(3) 2 時間についての感想

- 2 乗に反比例という今までにない関数だったが，相似の関係などから，なぜこのような関数になるのかがよくわかった。
- 2 乗に反比例のグラフが y 軸対称になっていて面白かった。
- 最初は「光を数字で表すことができるのかな」と思ったけど，具体的な数字や文字をあてはめることで求めることができた。
- 光という数字に関係ないものが式で表せたり,「y は x の 2 乗に反比例する」という性質があることに驚いた。
- 面 2 の照度を求めた後，照度は距離の 2 乗に反比例することとつなげて考えるのが難しかったが，やりがいはあった。
- 数学というのは日常生活の自分たちが過ごしている中でも生かすことができ，そして数学で表すことができることがすごいと思った。
- 表，グラフ，式をもとに 2 つの数量 x と y についての関係を表す関数は，すごく幅広いことを感じました。
- 関数は今まではわかる数から公式にあてはめるだけだったけど，その式にも意味があることが分かりました。

本授業のねらいの達成度について考察する。

(a) 既習の関数の性質を用いて，新たな関数の性質を見つけることができる。

個人追究ではほとんどの生徒が，x の値を 2 倍，3 倍させて，それに対応して y の値がどのように変化しているかに注目していた。そして y の値がどのように変化しているかが分かり，既習の反比例ではないことに多くの生徒が気付いていた。それから関数の式を推測して求める生徒もいれば，既習の反比例のように x^2y の値が一定であることを用いて求める生徒もいた。その一方，やはり新たな関数の式を見つけることは難しく，式が分からなかった生徒もいた。既習の関数と比べて，新たな関数を見つけることを実感できなかった生徒もいたので，このねらいは達成できなかったと考える。

(b) 関数領域と図形領域を関連付けることで，関数の式の意味を理解できる。

個人追究では三角形の相似を利用して面2の照度を求めることができていたが，そこから前回の式 $y=\dfrac{a}{x^2}$ とつなげて考える生徒は少なかった。しかし，全体交流において面2の照度と前回の式をつなげて考えた生徒の意見を聞いて，多くの生徒が「照度は距離の2乗に反比例する」という事象に対する根拠を理解していた。アンケートにおいても照度が距離の2乗に反比例することを理解できた生徒がほとんどであり，またその理由についても表の実験結果ではなく，相似を使った証明から理解した生徒がほとんどであった。よって生徒たちは関数の式には意味があることを理解し，事象には理由があることを実感できたのでこのねらいは達成できたと考える。

6. 今後の課題

今後の課題は，本教材の見直しである。2つの改善点がある。

1つ目は今回の実践では光についての説明が多くなり，導入に多くの時間を使ったので，生徒たちの活動の時間が少なくなってしまったことである。アンケートにおいても説明が多かったという意見もあった。導入を簡潔にまとめることで，生徒たちの考える時間が増え，それにより全体交流で内容を深めることができる。導入をもっと短くすべきである。

2つ目は今回の教材において多くのことを理想化をしているのだが，中学3年は近似の考え方を未習なので生徒たちに説明しなかったことである。理想化は重要な数学的考え方の1つなので，その点も説明できるよう教材研究を続けていきたい。

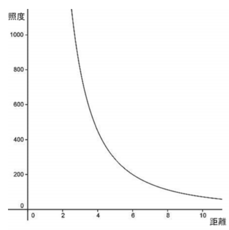
引用文献

[1] 文部科学省，2008，中学校学習指導要領解説，数学編.
[2] 青柳雅計ほか27名，1986，中学校数学3，学校図書株式会社.
[3] 矢野健太郎, 1977, ベクトル解析，秀潤社.

（資料 1）

<table>
<tr><td>展開</td><td>学習活動</td><td>指導と援助</td></tr>
<tr><td>導入</td><td>授業についての説明
・明るさについての授業であることを伝え，はじめに明るさを数字で表すことができることを生徒に伝える。
・光についての説明（明るさと照度・照度計について）
・照度計を実際に使い，近づけたり，遠ざけたりして照度が距離にともなって変わることを見せる。

問題　距離と照度の関係を調べよう。

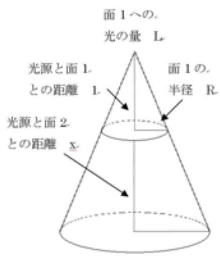
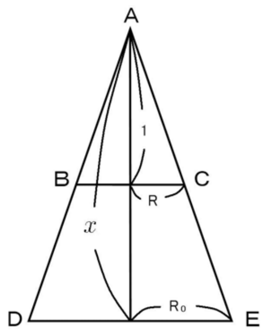
・距離と照度の関係は関数であることを確かめて距離と照度の表とグラフを提示し，どの関数に近いか質問し，見通しを持たせる。
<table>
<tr><td>距離 x（m）</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>$\cdots$</td><td>10</td></tr>
<tr><td>照度 y（lux）</td><td>7200</td><td>1800</td><td>800</td><td>450</td><td>288</td><td>200</td><td>$\cdots$</td><td>72</td></tr>
</table>
表


グラフ</td><td>・光の説明は図を使って説明する。
・光源と照射面を近づけたり，遠ざけたりして，明るさが変わること見せる。
・距離と照度の関係は関数であることを確認する。
・グラフを学習プリントに載せる。
・反比例の性質 3 つを全員の前で確認する。

● x の値とその x に対応した y の値の積が一定である。
● x の値を 2 倍，3 倍 $\cdots$ するとそれにともなって，y の値が $\frac{1}{2}$ 倍，$\frac{1}{3}$ 倍 $\cdots$ になる。
● 式は $y = \frac{a}{x}$ と表すことができる。（a は比例定数）</td></tr>
<tr><td>展開</td><td>**課題**　表やグラフを反比例の性質と比べて，距離と照度の関数関係の性質を見つけよう。

距離を x（m），照度を y（lux）として考える。
・x の値を 2 倍，3 倍…すると，それにともなって y の値は $\frac{1}{4}$倍,$\frac{1}{9}$倍,…になる。
・y の値を n 倍すると，それにともなって y の値は $\frac{1}{n^2}$倍 になる。
・x と xy は反比例の関係がある。
・x^2 と y の値は一定で，7200 である。
・$x^2y = 7200$ より式は $y = \frac{7200}{x^2}$ になる。</td><td>・今回は x の変域が 0 より大きいが，一般的に考えている子は評価する。
・x^2y が比例定数であることに気付くのは生徒だが，比例定数の意味については追究しない。
・y は x の 2 乗に反比例している，という言葉は生徒から出なくてよい。</td></tr>
<tr><td>まとめ</td><td>**まとめ**　x と y の関係を表す式が $y = \frac{a}{x^2}$ となるとき，y は x の 2 乗に反比例している，という。照度は距離の 2 乗に反比例している。

まとめた後，実際の実験結果を提示する。
次の授業へのつながり
・今回は実験結果を利用して距離と照度の関係を見つけたが，どうしてこのような関係があるのだろう。</td><td>・比例定数についてはまだふれず，質問があった場合は，この比例定数の意味も次の時間に考えていくことを伝える。
・既習の関数の性質と比べることで，新たな関数の性質についてもわかることを伝える。</td></tr>
</table>

展開	学習活動	指導と援助
導入	授業の説明・前回学習した性質は「照度は距離の 2 乗に反比例する」。 **問題**　この性質が成り立つ理由を考えよう。 ・この性質を示すために必要な光の性質を生徒に伝える。 1. 光源から発せられる光が通る形は円すいである 2. 同じ光源で照らされた 2 つの平面において，2 つの平面が平行ならば，2 つの面に入射する光の量は等しい 3. 2 つの照射面において，光の量が等しければ照射面が広い方が暗い ・光の性質から照度の定義と公式を提示する。 $\text{照度}=\dfrac{\text{照射面に当たる光の量}}{\text{照射面の面積}}$ ・光の量の意味を理解できるようになるために以下の問題を提示する。 光源によって照らされた面アの面積が 100，照度が 10 である。同じ光源によって照らされた平行な面イの面積が 200 のとき，面イの照度を求めよう。 ・距離が x である面 2 の照度を求めるための場面設定をして，まず面 1 の照度を求める。 $(\text{面 1 の照度}) = \dfrac{L}{\pi R^2}$	・新たな光の性質は，円すいを使って説明する。 ・図を先に提示してから説明する。 ・問題場面は以下のように設定する。  面 1 と面 2 は平行である
展開	**課題**　光の性質をもとにして面 2 の照度を求めて、照度が距離の 2 乗に反比例する理由を考えよう。 (証明) 照度を求めるために面 2 の半径を求める。 円すいの断面図は二等辺三角形なので、円すいの頂点を A、面 1 を BC、面 2 を DE となる二等辺三角形を利用する。 面 1 と面 2 は平行なので二角相等より △ABC ∽ △ADE よって相似の比より 1：R ＝x:面 2 の半径 ここから 面 2 の半径＝ Rx より、面 2 の面積は $\pi(Rx)^2$ となる。 よって面 2 の照度 y は $y = \dfrac{L}{\pi(Rx)^2}$ となる。 前回の関数の式は照度の公式を利用してわかった関数の性質である。 前回の距離と照度の式 $y = \dfrac{a}{x^2}$ と求めた照度は同じ。 よって $\dfrac{a}{x^2} = \dfrac{L}{\pi(Rx)^2}$ となるので $a = \dfrac{L}{\pi R^2}$ ということがわかる。 よって比例定数 a とは距離が 1 のときの照度である。	・円すいの断面図は二等辺三角形である。  円すいの断面図 ・円すいの断面図を見れない子を優先的に援助する。 ・照度を求めて手が止まったら、前回の関数の式と比べてみれるよう指導する。
まとめ	**まとめ**　照度が距離の 2 乗に反比例するのは，光の性質や照度の公式によって求めた照度から現れた性質である。関数の関係を表す式にも意味がある。 ・x の定義域が全ての実数であるときのグラフを見せる。 ・アンケートの記入を行う。	・グラフが y 軸対称であることを確認する。

（資料 2）

光が数字になっちゃった!!

照度とは・・・光源で照らされた場所（＝照射面）の明るさを数値化したもので、値が大きいほど、その場所は明るく、値は常に 0 以上。
単位　lux（ルクス）

問題　距離と照度の関係を調べよう。

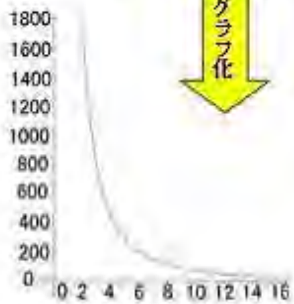
照度を測る道具・・その名も　**照度計！！**

照度計とは　・・・照らされた場所の照度を測るための道具。光源から垂直に降ろした場所におく。
使用上の注意・・・正確な照度を測定するためには、測定前に真っ暗にする必要がある。日常生活の中で真っ暗にすることができない。

距離が決まると照度がただ 1 つ決まる　＝ 照度は距離の関数である！！

距離 x(m)	1	2	3	4	5	6	・・・	10
照度 y(lux)	7200	1800	800	450	288	200	・・・	72

グラフ化



y が x に反比例する
・x の値を 2 倍、3 倍、・・・するとそれにともなって y の値は 1/2 倍、1/3 倍、・・・となっていく。
・対応する x と y の積は一定である。
・式は　$y = \frac{a}{x}$　（a は比例定数）

3年　　組　名前

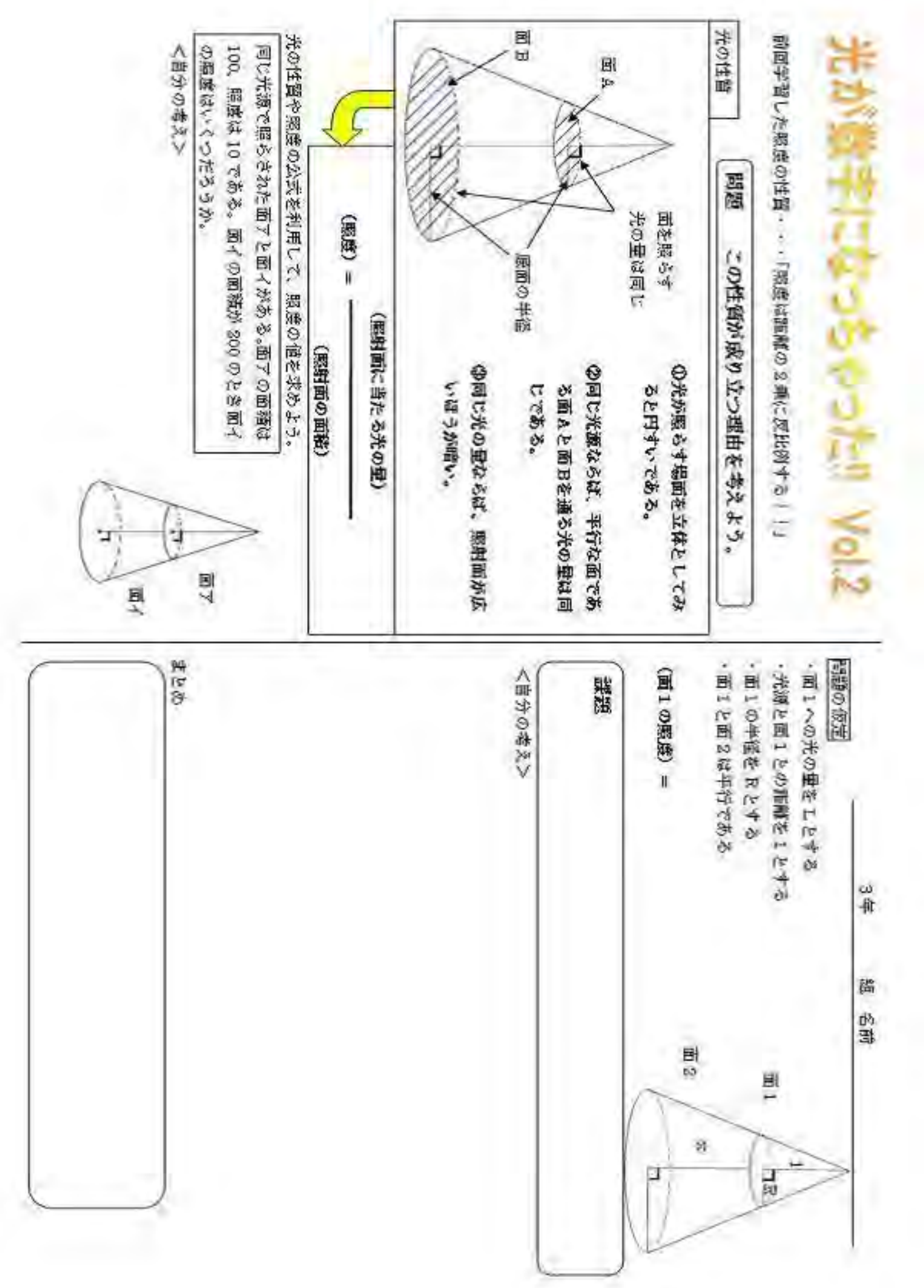
課題　反比例の性質をもとに、表から距離と照度の関数の性質を調べよう。

＜わかったこと＞

距離 x(m)	1	2	3	4	5	6	・・・	10
照度 y(lux)	7200	1800	800	450	288	200	・・・	72

まとめ

（資料 3）



光が数字になっちゃった!! Vol.2

前回学習した照度の性質・・・「照度は距離の２乗に反比例する！！」

問題　この性質が成り立つ理由を考えよう。

光の性質

①光が照らす場面を立体としてみると円すいである。

②同じ光源ならば、平行な面である面 A と面 B を通る光の量は同じである。

③同じ光の量ならば、照射面が広いほうが暗い。

$$（照度）= \frac{（照射面に当たる光の量）}{（照射面の面積）}$$

光の性質や照度の公式を利用して、照度の値を求めよう。

同じ光源で照らされた面アと面イがある。面アの面積は 100、照度は 10 である。面イの面積が 200 のとき面イの照度はいくつだろうか。

<自分の考え>

3年　　組　名前

問題の仮定

・面 1 への光の量を L とする

・光源と面 1 との距離を 1 とする

・面 1 の半径を R とする

・面 1 と面 2 は平行である

（面 1 の照度）＝

課題

<自分の考え>

まとめ