岐阜数学教育研究
2011, Vol. 10, 10-18

相似と三平方の定理をともに活用する教材の研究

浅井寛隆[1]，愛木豊彦[1]，小川達也[2]

児童・生徒が「数学のよさ，楽しさ」を実感するためには，どのように数学を使うことができるのかを理解することが重要だと考える。そこで，児童・生徒でも興味・関心を持って取り組めるであろうと思われるサッカーを題材にし, サッカーの中でどのように数学を使うことができるのかを考えた。そして，図形に関わる定理，作図を用いて,「サッカーのパス」に関する問題を解決する教材の開発を行った。本論文では，その教材の内容について報告する。

＜キーワード＞サッカー，直角三角形，三平方の定理，三角形の相似，作図

1. はじめに

平成 20 年 9 月 25 日に発行された中学校学習指導要領解説数学編 [1] には，中学校数学科の目標の中に「数学的活動を通して」という文言がある。数学的活動のうち，特に中学校数学科において重視しているのは以下の 3 つの活動である。既習の数学を基にして数や図形の性質を見いだし，発展させる活動，日常生活や社会で数学を利用する活動，数学的な表現を用いて根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動である。本論文では，中学校数学科の目標実現を目指し，これら 3 つの活動を含む授業を開発することにした。そこでは，特に日常生活の中から題材を選ぶこと，既習の数学を使って問題解決すること，既習の数学を発展させることを重視した。

2．授業の概要

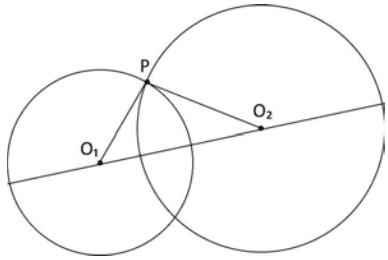
2.1　題材について

本論文で示す題材はサッカーのパスである。サッカーのパスについて，次の問題を考える。「A と B という 2 人がいて，A が出したパスを一定の速度である直線上を走っている B が受けるものとする。一直線上に進むパスされたボールの速度を一定とすると，パスをどの方向に出せば，B が止まらずにこのパスを受けることができるのかを考える。この時，次の性質が成り立つ。

性質 1

ボールの速度と B の走る速度がともに一定であるとする。パスを出す角度を変化させたとき，B が止まらずにパスを受ける位置の軌跡は，ある円周上か直線上になる。

(証明) まず，A と B が座標平面にいるものとする。そして，ボールの速度と B の走る速度をそれぞれ k と 1 とし，A の位置，B の走り始める位置をそれぞれ $\mathrm{O}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{O}_2(a,\ b)$ $(b \neq 0)$ とする。



B が止まらずにパスを受けるまでの時間を t，パスを受ける地点の座標を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とすると，

$$\mathrm{PO}_1 = kt, \mathrm{PO}_2 = t,$$

$$\mathrm{PO}_1 : \mathrm{PO}_2 = k : 1$$

[1]岐阜大学教育学部
[2]岐阜大学教育学部附属中学校

となる。また，

$$\mathrm{PO}_1 = \sqrt{X^2+Y^2},$$
$$\mathrm{PO}_2 = \sqrt{(X-a)^2+(Y-b)^2}$$

より，

$$X^2+Y^2 = k^2\{(X-a)^2+(Y-b)^2\} \qquad (6)$$

(i) $k=1$ のとき，(1) より

$$Y = -\frac{a}{b}X + \frac{a^2+b^2}{2b}$$

となるので，P は直線上にある。
(ii)$k \neq 1$ のとき，(1) より

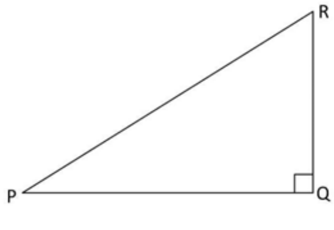
$$\left(X - \frac{ak^2}{k^2-1}\right)^2 + \left(Y - \frac{bk^2}{k^2-1}\right) = \frac{k^2(a^2+b^2)}{(k^2-1)^2}$$

となるので，P は円周上にあることがわかる。

(証明終)

本授業を実践するのは中学校 3 年生のため，軌跡を方程式を用いて扱うことはできない。そこで，中学校 3 年生でも考察できるように問題を簡単にすることにした。そのため，B は A と B が最初にいた位置を結んだ直線に垂直な方向にのみ走ることにした。そのときに，A はどの方向にパスをしたらよいかということを考える。

A のパスの速度を 10m/s，B の走る速度を 5m/s とし，A の位置を P，B の走り出す位置を Q，ボールを受ける位置を R とする。このときの ∠QPR の大きさを求める。まず，3 点 P，Q，R に対し，三角形 PQR は図のような直角三角形になる。

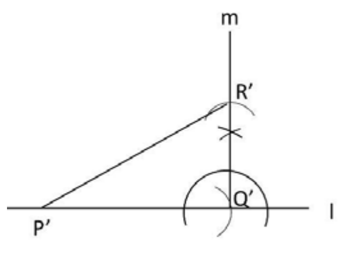


そして，B が走り出してから k 秒後にボールを受けることにすると，PR $=10k$，QR $=5k$ より，三平方の定理を使って，PQ $=5\sqrt{3}k$ となる。三角形 PQR は辺の比が 1:2:$\sqrt{3}$ の直角三角形なので，∠QPR $=30$ 度となる。

次に，A のパスの速度を 15m/s とする。B が走り出してから k 秒後にボールを受けるとすると，PR $=15k$，QR $=5k$ となるので，sin∠QPR $=0.33\cdots$ となる。三角比の表より，∠ QPR = 19〜20 度となる。今回は中学生が対象なので，三角比の表は使えない。そこで，今回は定規，コンパスを使って図をかき，その図で角の大きさを分度器で測定することとした。通常は作図では定規で長さを測ることはできないと約束するが，今回はそれもできることとした。

三角形 PQR と相似な三角形の作図方法としては，次の (I)(II) の二つがある。

(I)
- (i) 等しい辺の長さが 1 である直角二等辺三角形をかき，長さが $\sqrt{2}$ の線分を作る。
- (ii) (i) の線分を 2 倍して得られる長さが $2\sqrt{2}$ の線分を利用して，直線 l 上に長さ $2\sqrt{2}$ の線分 P’Q’ をとる。
- (iii) Q’ を通り，l に垂直な直線 m をひく。
- (iv) m 上に Q’R’=1 となる点 R’ をとる。
- (v) 2 点 P’，R’ を結ぶ。



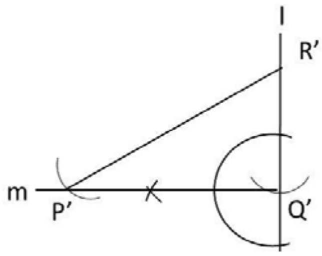
方法 (I)

(II)
- (i) 直線 l 上に長さ 1 の線分 Q’R’ をとる。

(ii) Q’ を通り，l に垂直な直線 m をひく。

(iii) R’ から長さ 3 をとり，m との交点を P’ とする。

(iv) 2 点 P’，R’ を結ぶ。

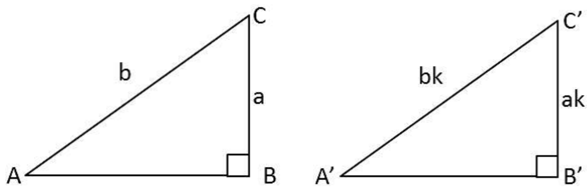


方法 (II)

方法（I) で作図した三角形 P’Q’R’ は，既習の三角形の相似条件（二組の辺の比が等しく，はさむ角が等しい）より三角形 PQR ∽三角形 P’Q’R’ がいえる。方法（II) では，既習のの相似条件が使えない。そこで，次の性質が成り立つことを示す必要がある。

性質 2

斜辺の比と他の一辺の比が等しい直角三角形は相似である。



(証明) 三角形 ABC と三角形 A’B’C’ において，AC $= b,$ A’C’ $= bk,$ BC $= a,$ B’C’ $= ak$ とおくと，三平方の定理より，

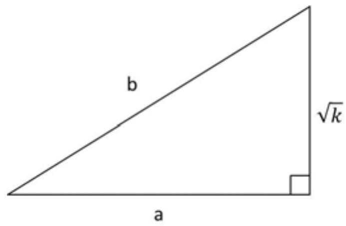
$$\mathrm{AB}^2 + a^2 = b^2,$$
$$\mathrm{AB} = \sqrt{b^2 - a^2},$$
$$\mathrm{A'B'}^2 + (ak)^2 = (bk)^2,$$
$$\mathrm{A'B'} = k\sqrt{b^2 - a^2},$$

よって，AB:A’B’=BC:B’C’=1:k である。従って，二組の辺の比が等しく，そのはさむ角が等しい（またはすべての辺の比が等しい）ので， 三角形 ABC ∽三角形 A’B’C’ となる。

(証明終)

方法 (II) で作図した場合も三角形 PQR ∽三角形 P’Q’R’ となり，∠ QPR の大きさを測定できる。

次に，この作図の方法を用いると有理数しか測ることのできない定規を用いて，有理数 k に対して $\sqrt{k}$ の作図が簡単にできることを示す。つまり，$k \in \mathbb{Q}$ に対し，$a^2 + k = b^2$ となる $a,b \in \mathbb{Q}$ の存在が示されれば，方法 (II) で斜辺の長さが a，他の一辺の長さが b の直角三角形が作図できるので，$\sqrt{k}$ の作図ができる。このことを次の性質 3 として証明する。



性質 3

$k > 0$（$k \in \mathbb{Q}$）について，$a^2 + k = b^2$ となる a,b $(a > 0, b \geq 0)$（$a,b \in \mathbb{Q}$）が存在する。

（証明）$b^2 = a^2 + k$ とすると，

$$k = b^2 - a^2,$$
$$k = (b + a)(b - a).$$

これを満たす有理数の組 $(a,\ b)$$(a > 0, b \geq 0)$ の存在を示せばよい。

(i) $k = 1$ のとき

$$(b + a)(b - a) = 1$$

$a = 1, b = 0$ とすればよい。

(ii) $k \neq 1$ のとき

$$k = (b + a)(b - a)$$

よって，$b+a=k$，$b-a=1$

または，$b+a=1$，$b-a=k$ とすればよい。

今，$a>0$,$b\geq 0$ なので，$b+a>b-a$ より，

(a) $k>1$ のとき

$$\begin{cases} b-a=1, \\ b+a=k, \end{cases}$$

とすると，

$$\begin{cases} a=\frac{k-1}{2}, \\ b=\frac{k+1}{2}. \end{cases}$$

このとき $k\in\mathbb{Q}$ なので，a，$b\in\mathbb{Q}$ である。

(b) $0<k<1$ のとき

$$\begin{cases} b+a=1, \\ b-a=k, \end{cases}$$

とすると，

$$\begin{cases} a=\frac{k+1}{2}, \\ b=\frac{k-1}{2}. \end{cases}$$

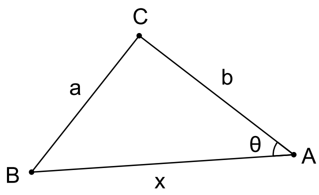
このとき $k\in\mathbb{Q}$ なので，a，$b\in\mathbb{Q}$ である。

(証明終)

この節の最後に，二辺の長さと一つの角がどのようなとき，三角形が一意的に定まるのかを考える。ただし，一つの角は二辺にはさまれていないものとする。

性質 4

三角形 ABC において，∠ BAC = θ とすると，AB の長さが一意的に定まることの必要十分条件は，$a>b$ または $0<\theta<90$ 度かつ $a=b\sin\theta$ である。



(証明）AB $=x$ とすると，

余弦定理より，

$$a^2=b^2+x^2-2bx\cos\theta,$$
$$0=x^2-2bx\cos\theta+(b^2-a^2)$$

が成り立つ。ここで，

$$f(x)=x^2-2bx\cos\theta+(b^2-a^2)$$

とすると，$f(x)=0$ が $x>0$ の解をただ 1 つもてば，AB の長さが一意的に定まるので，

「$f(x)=0$ が $x>0$ の解をただ 1 つもつこと」が,「$a>b$ または $a=b\sin\theta$ $(0<\theta<90$ 度$)$」に同値であることを示す。

ここで，$f(x)=0$ の判別式を D，2 つの解を α,β とすると，2 次関数のグラフの性質から，

「$f(x)=0$ が $x>0$ の解をただ 1 つもつこと」

$\Leftrightarrow$ ($D=0$，$b\cos\theta>0$) または，($D>0$，$\alpha\beta<0$)

が成り立つ。

従って，

(i) ($D=0$，$b\cos\theta>0$)$\Leftrightarrow$ $a=b\sin\theta$ $(0<\theta<90$ 度$)$

と

(ii) ($D>0$，$\alpha\beta<0$)$\Leftrightarrow$ $a>b$

を示せばよい。

(i)

$$\begin{cases} D=0, & (7) \\ b\cos\theta>0, & (8) \end{cases}$$

とすると，(2) より，

$$\begin{aligned} D/4 &= (b\cos\theta)^2 - (b^2 - a^2) \\ &= b^2(\cos\theta^2 - 1) + a^2 \\ &= a^2 - b^2 \sin\theta^2 \\ &= (a + b\sin\theta)(a - b\sin\theta), \end{aligned}$$

なので，$(a + b\sin\theta)(a - b\sin\theta) = 0$,

$a + b\sin\theta > 0$ より，$a - b\sin\theta = 0$.

$$a = b\sin\theta.$$

(3) より，

$$b\cos\theta > 0,$$

$b > 0$ より, $\cos\theta > 0$,

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

(2),(3) より，

$$\begin{cases} a = b\sin\theta \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

逆も明らかに成り立つ。

(ii)

$$\begin{cases} D > 0, & (9) \\ \alpha\beta < 0, & (10) \end{cases}$$

とすると，(4) より，

$$\begin{aligned} D/4 &= (b\cos\theta)^2 - (b^2 - a^2) \\ &= (a + b\sin\theta)(a - b\sin\theta), \end{aligned}$$

$(a + b\sin\theta)(a - b\sin\theta) > 0$ となる。

$a + b\sin\theta > 0$ より，$a - b\sin\theta > 0$ なので，

$$a > b\sin\theta.$$

(5) より，

$$(b^2 - a^2) < 0,$$
$$(b + a)(b - a) < 0,$$

$b + a > 0$ より，$b - a < 0$ なので，

$$b < a.$$

(4),(5) より，

$$\begin{cases} a > b\sin\theta, \\ b < a, \end{cases}$$

$0 \leq \sin\theta \leq 1$ より，

$$a > b \geq b\sin\theta \text{ なので，}$$
$$a > b.$$

逆も明らかに成り立つ。

(証明終)

2.2 授業のねらい

この授業で扱うのは,「岬さんのパスのスピードは毎秒 15m です。翼さんはゴールに向かって毎秒 5m で一直線に走ります。二人は横一直線上にいて，岬さんは翼さんが動き出すと同時にパスを出すとき，岬さんはどの方向にパスを出すとよいだろうか。」という問題である。この問題に対し，三角形の相似や三平方の定理，作図を用いて「約 20 度で出すとよい」ということを導く。

そして，授業のねらいを次のように設定した。

(1) ぴったりと合うパスの場面を図形として表すことができる。

(2) 問題を解決する過程を通して，三平方の定理，三角形の相似，作図の有用性を感じることができる。

(3) 三角形の相似と三平方の定理との関連性を知る。

2.3 授業の流れ

この授業は2時間構成である。

第1時間目について

(1) 問題提示

まず，本時はサッカーのパスについて考えることを伝える。その後，問題場面を説明するために動画を見せる。さらに，図を用いて「ぴったりと合うパス」の意味を説明する。「岬さんのパスのスピードは毎秒15mです。翼さんはゴールに向かって毎秒5mで一直線に走ります。二人は横一直線上にいて，岬さんは翼さんが動き出すと同時にパスを出すとき，岬さんはどの方向にパスを出すとよいだろうか。」という問題を提示する。

(2) 課題設定

生徒は，岬さんのパスの角度が大きいと翼さんはボールに届かず，角度が小さいと翼さんがボールを受ける前にボールをとられてしまうので，よいパスとは翼さんとボールがぴったり合うようなパスだということを知る。翼さんがボールを受けるのをk秒後とし，BC, CAが文字を使ってどのように表せるのかを考え，三角形ABCが直角三角形であることを確認する。どの方向にというのは，∠BACを求めることとし,「相似な三角形をかいて,∠BACの大きさを求めよう。」という課題を設定する。

(3) 個人追究

学習プリントに自分の考えを記入させる。机間指導では，三平方の定理を使って，$\sqrt{2}$が出てきて悩んでいる生徒に対しては，ヒントカードを与える。方法(I)を使って相似な三角形をかいた生徒に対しては,「パスのスピードが変わっても，同様の方法でかけるか。」を問い，方法(II)でもかけるようにする。方法(II)でかいた生徒にも「パスのスピードが変わっても，同様の方法でかけるか。」を問い，パスのスピードが変わってもかけることを確認する。

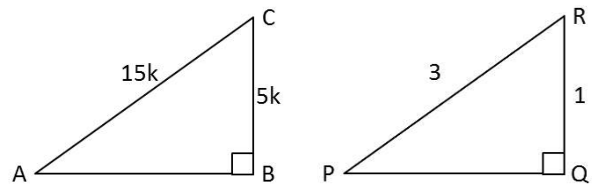
(4) 意見交流・まとめ

方法(I)でかいた子を先に指名する。次に，方法(II)を使ってかいた子を指名する。方法(I)(II)どちらも角度を測ると約20度になるので，どちらの方法でかいた三角形も，問題の三角形と相似でありそうだということを確認する。相似な三角形をかくときに使った辺や角を全体で確認する。このとき，方法(I)では二組の辺の比が等しく，そのはさむ角が等しいので問題の三角形と相似になることを確認する。また，方法(II)では斜辺と他の一辺の比が等しい直角三角形であるが，これは三角形の相似条件にあてはまらない。この方法でかいた三角形が相似であることを次の時間に証明する。

第2時間目について

(1) 問題提示

前回の作図方法を確認する。前回かいた三角形が相似であることを示すために，次の2つの三角形が相似であることを証明する。



(2) 課題設定

「三角形ABCと三角形PQRが相似であることを証明しよう。」という課題を設定する。

(3) 個人追究

三平方の定理を使って，ABとPQを求めた後，既習の三角形の相似条件を用いて，２つの三角形が相似であることを証明する。早くできた子に対しては，発展問題として，一般的な場合でも斜辺の比と他の一辺の比が等しい直角三角形が相似であることを証明する。

(4) 意見交流・まとめ

生徒が証明で用いた定理や条件を示しながら説明する。そして，斜辺と他の一辺の比が等しい直角三角形が相似であることを確認する。最後に，相似な三角形を使うことで実際

には測りづらい角度や長さを求めることができることを伝え，2時間のまとめとする。

3　実践結果

講座名：「パスの達人」
場所：岐阜大学教育学部附属中学校
１時間目　実施日：平成23年2月28日（月）
第3校時
対象：中学3年生
２時間目　実施日：平成23年3月1日（火）
第3校時
対象：中学3年生

3.1　活動の様子

1時間目

(1) 問題提示～課題設定

動画を用いてぴったりと合うパスについて説明したことにより，生徒は問題場面を理解することができた。また，問題場面から直角三角形を見出し，k 秒後の距離を全体で確認した。「相似な三角形を使えばいいのはなぜか。」という問いに対して,「相似な三角形は対応する角の大きさが等しいから。」という意見があり,「相似な三角形をかいて，∠BACの大きさを求めよう。」という課題を提示した。

(2) 個人追究

生徒は，コンパス，分度器，定規を用いて，相似な三角形を作図することができていた。ほとんどの生徒は方法 (II) の考え方で作図をしていた（写真 1）。

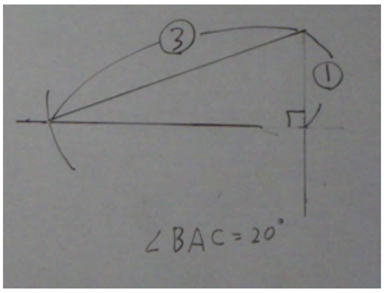


写真 1

この方法で作図した生徒に「パスのスピードが変わっても相似な三角形を作図できるか。」を問うと,「できる。」と答える生徒がほとんどであった。すでに自分が作図した三角形が問題の三角形と相似であるかということについてまで考えている生徒もいた。

また，方法 (I) の考え方を用いて作図している生徒もいた（写真 2)。その中には，方法 (II) も思いついたが，その場合，相似かどうかはっきりしないので方法 (I) を選んだという生徒もいた。

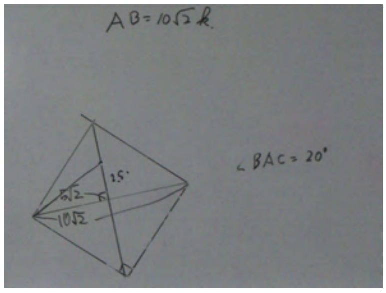


写真 2

この方法で作図した生徒の中には，三角形の相似条件を意識して作図している生徒もいた。

(3) 全体交流・まとめ

方法 (I) で作図した生徒と方法 (II) で作図した生徒をそれぞれ指名し，黒板を使い，発表してもらった。その後,「三角形の相似条件に当てはまるかどうか。」を問い，方法 (I) で作図した三角形は三角形の相似条件に当てはまるが，方法 (II) で作図した三角形は三角形の相似条件に当てはまらないことを確認した。しかし，どちらも角度を測ると約 20 度になることから，相似であると伝え，次の時間にこのことを証明することにした。

2時間目

(1) 問題提示～課題設定

前時の学習を振り返り,「三角形 ABC と三角形 PQR が相似であることを証明しよう。」という課題を設定する。

(2) 個人追究

使った定理や相似条件を明らかにして，証

明をすることができていた。ほとんどの生徒が一般化まで考えることができていた。

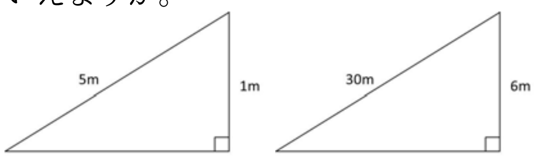
(3) 全体交流・まとめ

生徒に証明を発表してもらった。斜辺の比と他の一辺が等しい直角三角形は相似であることを確認し，方法 (II) の考え方でかいた三角形が相似であることも確認した。相似な三角形を利用することで，実際には測りづらい角度や長さを知ることができるということを２時間を通してのまとめとした。

4．考察

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

1. ぴったりと合うパスの意味が理解できた
   - はい　38 名
   - いいえ　1 名
2. 三角形の相似を使って，角度が求められることがわかった。
   - はい　38 名
   - いいえ　1 名
3. 次の 2 つの直角三角形は相似であるといえますか。



   - 相似である　38 名
   - 相似でない　1 名

   理由 (相似である)

   - 辺の比がすべて等しいから
   - 二組の辺の比が等しく，そのはさむ角が等しいから
   - 直角三角形だから三平方の定理が使えて，残りの辺の長さを求めればよい
   - 授業と同じことをすればわかるから
   - 授業内容と数値が違うだけだから

   理由 (相似でない)

   - 比が合わないから
4. 感想を自由に書いてください。
   - このことを使えば，カットされずにパスが出せる。
   - 三平方の定理の学習が深まった。
   - 今までの学習をもとに考えることができた。
   - 直角三角形が特別な三角形だとわかった。
   - 実際の距離を測らなくても，相似な三角形を利用することで角度や距離を求められることがわかった
   - いろいろな図形の性質を考えていきたい。
   - これからの学習に生かしていきたい。
   - 他にどんなことに利用できるかを知りたい。

本授業のねらい (1)(2)(3) の達成度について考察する。

(1) について

黒板での説明や動画による説明により，直角三角形を出した時に「なぜ」という表情を浮かべた生徒は見られなかった。また，アンケートより，ぴったりと合うパスについて理解できていることから，問題場面を図形として捉えることができていたと考える。

(2) について

ほとんどの生徒が相似な三角形をかいて，

角度を測定し，パスを何度で出したらよいかを求めることができていた。「パスのスピードが変わっても求められるか。」と聞いたときに,「この長さを変えてかけばいい。」と答える生徒がいた。また，三平方の定理や三角形の相似条件を用いて，証明することができていた。アンケートの感想には，相似な三角形や三平方の定理を使えば，実際に測らなくても距離や角度が求められるという感想があった。このことから，三角形の相似や三平方の定理，作図の有用性を感じることができたと考えられる。

(3) について

ほとんどの生徒が斜辺と他の一辺の比が等しい直角三角形は，三平方の定理を利用し残りの一辺を求めることで，相似だといえるということが理解できていた。これはアンケートからも相似であると答えた生徒がほとんどであり，理由として「三平方の定理」「三角形の相似条件」という用語が多く見られたことからもそのことがいえる。そのため，生徒は三角形の相似と三平方の定理との関連性を少しは実感することができたのではないかと考える。

5．今後の課題

１つ目は，題材についてである。今回はサッカーのパスを題材としたが，角度が求められたとしても実際のサッカーの場面で使うことはほとんどない。また，今回の問題では扱いやすいような数値を使用したため，実際の場面とは違うのではないかと感じた生徒がいたのではないかと考える。そのため，この内容が他にどんな場面で使うことができるのかを考えるとともに，この内容を扱うのにより適した題材を考えていきたい。

２つ目は，条件を変えた時にどのようになるのかを考えていくことである。今回は人が二人を結んだ直線に対して垂直に走るとし，直角三角形を取り扱うこととしたが，人が斜めに走ったときや，人はどの方向にも走るとしたときなども考えていくことができるはずである。そして，その中でどの学習内容と関わりがあるのかを考え，どのような生徒を対象として扱うことができるのかまで考えていきたい。

今回の教材開発をもとに，今後も算数・数学は楽しいと思える児童・生徒が増えるような教材を考えていきたい。

引用文献

[1] 文部科学省，2008，中学校学習指導要領解説数学編, 教育出版株式会社.