岐阜数学教育研究
2003,Vol. 2, 87-98

発展的内容を取り入れた「数学Ⅲ」の授業実践

羽賀　均[1]，山田雅博[2]

高等学校を含む教育現場では，“多くの知識を詰め込む授業の結果として教育内容の消化不良につながり「理数科離れ」を促進している”ということが指摘されて久しい。その結果として学習すべき内容の削減が行われつつある。他方で，文部科学省のスーパーサイエンスハイスクール構想にみられるように，高等学校が大学と連携して高度な科学の授業を行おうとする試みも存在する。特に理系に適性を有する生徒に対しては，このような試みが，数学に対する興味・関心を喚起させるために有効になる場面があると著者は考える。高等学校及び大学教員とが連携を行い，大学で学習する内容を取り入れた授業を通常のカリキュラムの中で高等学校教員が行うための指導のあり方について考察し，実践を行い，その指導内容及び方法について検証する。

＜キーワード＞発展的授業内容，興味・関心の喚起，大学と高等学校の連携，L’Hospitalの定理

1. はじめに

数学に対して生徒が，過負担と感じる場面が増えてきている。当然の結果として「理数科離れ」が促進されるという事態を招くことになり，指導すべき内容の削減が行われつつある。この処置は多くの生徒に数学の興味・関心をもたせるための一提案として理解できるが，理系に適性を有する生徒にとっては必ずしもそれが唯一の有効な処置であるとは思わない。例えば，文部科学省のスーパーサイエンスハイスクール構想や岐阜県教育委員会主催の高校数学セミナーにみられるように，高度な数学の内容を伝えようとする試みも存在する。指導すべき内容を超えた授業実践であっても数学の興味・関心を喚起させることは可能であると考えている。言うまでもなく指導すべき教育内容を超えた授業内容については，その場面に応じて適した教材を準備する必要がある。それは，時として厳格な論証を含むこともあるが，その際には生徒に理解できる範囲内でのかみくだきや実用性なども含んでいることが望まれる。数学に対する興味・関心を喚起させる発展的内容を含んだ授業についての先行研究としては，羽賀・山田[3]の微分方程式を教材にしたものがある。それによると十分ではないが，内容に興味・関心を抱かせることができたとある。[3]における授業実践は，身近な社会現象が数学を用いて記述できることを教材にしたものである。今回は定理が演繹的に展開されていくことを教材にしたものであり，[3]とは趣旨の異なる授業実践である。特に理系に適性を有する生徒に対して，将来数学を深く学びたいという興味・関心を喚起させる内容を伝える授業実践を行いたいと考えた。本実践が，興味・関心を喚起させるために有効であるかどうかという点の検証を行っていくことが本論文の趣旨である。

[3]において数学に対する興味・関心を喚起させるためには，数学の魅力を実感させる必

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

要があると述べられている。ここで言う，数学の魅力についての解釈は，それにたずさわる人の価値観により多岐にわたると思われるが，その中で著者は体系化されうる抽象的思考の構築過程に注目した。一見，無関係に思われるようなある抽象化された思考上の産物が，実は有機的に他と関わりを持ち，全く無駄なく体系化されていく。この過程は厳格であるが，高度に抽象化されたものが広く他との関わりがあることを実感できる場面は感動的なものであることが想像できる。また体系化されて構築されたものを多面的に眺めるだけでも数学の魅力を感じとることができる。高校生に，この体系化されうる抽象的思考の構築過程を直接体験させることは無理があると思われるが，学習した内容と他の発展的内容との有機的な関わりを知らしめることは可能である。「数学Ⅲ」の指導を通して大学の「微分積分学」で学習するような内容に触れることにより，高次元的見地から高等学校の数学に関わりのある発展的内容を伝え，理系に適性を有する高校生に数学の魅力を実感させることができればよいと考える。

指導内容の選択にあたり留意した点を以下に挙げることにする。

(1)「数学Ⅲ」との有機的な関わりを実感できる内容である。

(2) 数学の魅力を感じさせることができる内容を伴い，将来数学を深く学びたいという興味・関心を喚起させるために有効な内容である。

(3) 理論が抽象的過ぎず高校生が理解可能な内容である。

上記の留意点に基づき，教材はL'Hospitalの定理（参考．第６節）に関連するものとした。L'Hospitalの定理は，高等学校の学習内容である平均値の定理及びRolleの定理（参考．第６節）の発展的内容であり，「数学Ⅲ」との有機的な関わりを実感できるものである。また，定理が演繹的に展開されていく過程やその実用性は，数学の魅力を感じさせることができるものである。その難易度もL'Hospitalの定理の一部に限定した証明のみを扱うのであれば，高校生に理解可能なものであると考える。

2. 教材の考察

微分法における流れはRolleの定理が出発点となり，Taylorの定理やL'Hospitalの定理などが導き出されることを中心に展開されていく。Taylorの定理はRolleの定理により導き出され，L'Hospitalの定理はRolleの定理から始まりCauchyの平均値の定理（参考．第６節）を経由して導き出される。これらは，各定理が演繹的に展開されていくことを示している。高等学校では，平均値の定理の特殊なケースがRolleの定理としてとらえられている一面もあり，またその後の定理の系統性が指導されないためRolleの定理の重要性をさほど意識する場面はない。しかし，実際にはRolleの定理から様々な定理が導き出され，それらの定理を学ぶことによりRolleの定理の重要性をあらためて認識させられる。

Rolleの定理及び平均値の定理は，高等学校の指導内容になっている。Cauchyの平均値の定理及びTaylorの定理は，平均値の定理の拡張されたものとみなすこともできる。またL'Hospitalの定理は，複雑な関数の極限算出に効力を発揮するものであり，その実用性には目を見張るべきものがある。その定理の系統性や拡張性さらに実用性は，高校生に十分に興味・関心を抱かせるものであると考える。

3. 指導内容及び方法

L'Hospitalの定理が，高等学校で指導するRolleの定理を出発点に展開されていくため，Rolleの定理の内容を示し，その内容をグラフを用いて感覚的に再確認するところを導入部分とする。

次にCauchyの平均値の定理を示し，この定理を導くための関数$F(x)$を定義し，この関数

$F(x)$ が Rolle の定理の条件を満たしていることの確認を順次行うことにする。関数 $F(x)$ の連続性及び微分可能性は，それぞれ高等学校での指導内容である連続関数の性質及び導関数の性質により確認は容易である。Rolle の定理の条件確認が済めば，簡単な計算で Cauchy の平均値の定理が導かれる。Cauchy の平均値の定理の特殊な場合が，高等学校での指導内容である平均値の定理であることを確認させ，Cauchy の平均値の定理が平均値の定理の一般化されたものであることを伝える。

最後に L'Hospital の定理の証明及びその演習を行う。L'Hospital の定理は代表的な４つの内容（参考．第６節）から構成されているが，証明の難易度を考慮して最も簡単に証明可能な「$x \to a$ のとき不定形 $0/0$ になる型」についてのみ，Cauchy の平均値の定理を用いて証明を行う。この証明過程は平易である。演習問題は，関数の極限で既習のものを中心に３題準備する。既習の算出方法に比べて，L'Hospital の定理を用いた場合が如何に容易に算出できるかを実感させるためである。併せて L'Hospital の定理が繰り返し利用できる場面などにも触れる。

第１著者は，かつて L'Hospital の定理について指導した経験はあるが，その際は定理を紹介し演習問題に適用させるだけのものであった。今回は，定理の系統性を実感させることをも重要視しているため，指導内容及び方法は，上記に従った手順で行うこととした。

4．授業のねらい

今回取り扱う L'Hospital の定理は高等学校の指導内容には含まれていない。ここで注意すべきことは，高等学校の学習範囲を超えたものを指導することが，“多くの知識を詰め込む授業になり，結果として教育内容の消化不良につながってしまい「理数科離れ」を促進する”ような実践になっては逆効果であって意味をなさないということである。あくまでも負担にならずしかも学ぶことの楽しさや充実感を味わいながら学習を進めることができるような授業実践でなくてはならない。

今回は，１節の (1)，(2)，(3) の留意点に対応させて各々，以下のことを指導のねらいとした。

1) 数学の論理が演繹的に展開されることを実感させる。

2) 数学における定理や命題などが実用性の高いものであることを実感させる。

3) 学習した内容を用いて身近な関数の極限を求めることができるようにさせる。

1) については，Rolle の定理から始まり Cauchy の平均値の定理を経由して L'Hospital の定理を導く過程が，論証の厳密な流れとなっている事実を実感させることをねらいとしている。

2) については，実際に関数の極限の算出を行わせ，L'Hospital の定理の実用性の高さを実感させることをねらいとしている。

3) については，既習の関数の極限が学習した内容を用いて別の方法で算出可能であることを理解させ，本時の内容が身近なものに適用可能であることを実感させる。また抽象的なものばかりでなく具体的な演習を取り入れ，高校生にも取り組みやすいものとなることをねらいとしている。

ねらいの 1)，2)，3) が，各々１節の留意点 (1)，(2)，(3) に対応している。

5．授業の指導案及び実践

以下の授業日時，及び指導対象で授業実践を行った。

授業日時	平成 15 年 5 月 20 日 (月) 第７限 15:10〜16:00
指導対象	岐山高等学校普通科 ３年３組（理系クラス） 生徒数 41 名
指 導 者	羽賀　均

次に示す指導案で授業の展開を行った。指

導案における例示は，理解を助けるために教師主導で行う例題であり，演習は，生徒主導で行う練習問題である。また，[指導] が，教師の指導する要点を，[学習] が教師の説明を受けて生徒が個々に行う計算などを表している。

また，50 分という時間的制約のある中での実践であり，時間を節約及び理解を助けるための補助資料として教授資料を使用した。この教授資料を指導案に続けて示す。

本来は，この試みは「微分法の応用の平均値の定理」を学習直後に実践する計画であったが，３年生の指導開始単元が「平均値の定理」の次の単元であったこともあり，準備期間を考慮して「微分法の応用」終了後に発展事項として位置付けて実践した。

指導案

段 階	指導内容 ([指導]) 及び学習内容 ([学習])	指導上の留意点及び ○ $\boxed{\text{評価}}$
導 入 5 分	**・Rolle の定理の確認** 「関数 $y = f(x)$ が $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能とする。$f(a) = f(b)$ ならば $f'(c) = 0$ を満たす c $(a < c < b)$ が存在する」 [指導] Rolle の定理の内容を板書する。 [学習] 定理の内容をグラフを用いて感覚的に再確認する。	・説明を聞き、理解・考察する場面とノートを板書する場面を区分けさせる (全般) ○ $\boxed{\text{知識・理解}}$ Rolle の定理の内容を把握している。 ○ $\boxed{\text{表現・処理}}$ Rolle の定理の内容をグラフを用いて感覚的に表現できる。
展 開 40 分	**・Cauchy の平均値の定理の証明** 「f, g は $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能ならば次を満たす c $(a < c < b)$ が存在する。但し，$g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ である。 $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ 」 [指導] Cauchy の平均値の定理の内容を板書する。 [指導] 要点を確認しながら証明を板書する。 証明 Rolle の定理の対偶から $g(b) - g(a) \neq 0$ $F(x) = f(b) - f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(x))$ にて $F(a) = F(b) = 0$ より $F'(c) = 0$ となる c $(a < c < b)$ が存在する。 ゆえに $-f'(c) + \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0$	

段 階	指導内容 ([指導]) 及び学習内容 ([学習])	指導上の留意点及び ○ 評価
	なる c $(a<c<b)$ が存在する。	
	[指導] $g(b)-g(a)\neq 0$ が，仮定 $g'(x)\neq 0$ $(a<x<b)$ より導かれる結論であることを確認する。	○ 知識・理解 対偶を理解できる。
	[学習] $g(b)-g(a)\neq 0$ の必要性を確認する。	○ 知識・理解 $g(b)-g(a)\neq 0$ の必要性を理解できる。
	[学習] $F(a)=F(b)=0$ を確認する。	
	[指導] $F(x)$ の連続性および微分可能性を確認させる。	○ 知識・理解 $F(x)$ が Rolle の定理の条件を満たしていることが理解できる。 ・$F(x)$ は連続関数の性質により $[a,b]$ で連続である。 ・$F(x)$ は導関数の性質により (a,b) で微分可能である。
	[学習] $F'(x)$ を算出する。	
	[指導] $g(x)=x$ の場合に Cauchy の平均値の定理を適用させる。	○ 関心・意欲・態度 Cauchy の平均値の定理を具体的に適用しようとする意欲がみられる。
	[学習] 平均値の定理が導かれることを確認する。	○ 数学的な考え方 Cauchy の平均値の定理が平均値の定理を一般化したものであることが理解できる。
	・L'Hospital の定理の証明（不定形 0/0）	
	[指導] $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ を考察させる。	○ 関心・意欲・態度
	[学習] 既習事項では対応不可能であることおよび不定形 0/0 になることを認識する。	不定形 0/0 の算出について工夫しようとする意欲がみられる。
	1)「f,g は a の近くで微分可能で $f(a)=g(a)=0$，$g'(x)\neq 0$ ならば $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 」	・代表的な不定形には 1)〜4) の型があるが、証明の煩雑さから 1) の型についてのみ証明する。
	[指導] L'Hospital の定理の内容を板書する。	
	[指導] 要点を確認しながら証明を板書する。	

段 階	指導内容 ([指導]) 及び学習内容 ([学習])	指導上の留意点及び ○ $\boxed{\text{評価}}$
	証明 Cauchy の平均値の定理より $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$ ($a<c<x$ または $x<c<a$) ゆえに $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ [指導] $x\to a$ のとき $c\to a$ であることを確認させる。 [指導] 論証に使われる定理の系統性を理解させる。	
	2)「f,g は十分大きな（小さな）x で微分可能で $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=0$，$g'(x)\neq 0$ ならば $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$」 3)「f,g は a の近くで微分可能で $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$，$g'(x)\neq 0$ ならば $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$」 4)「f,g は十分大きな（小さな）x で微分可能で $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=\infty$，$g'(x)\neq 0$ ならば $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$」	○ $\boxed{\text{数学的な考え方}}$ 1)〜4) の型に共通する状況を把握することができる。 （不定形 0/0，∞/∞）
	例示 $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}e^x=1$$ [学習] 既習事項では対応不可能なものが算出可能になることを確認させる。	・上記 1) の型に適合していることを確認させる。 ○ $\boxed{\text{関心・意欲・態度}}$ L’Hospital の定理により不定形の極限が算出可能になったことに関心をもつことができる。
	[指導] この極限は $f(x)=e^x$ のときの $f'(0)$ であることを確認させる。	○ $\boxed{\text{数学的な考え方}}$ 微分係数の定義式であることに気づき，その値が接線の傾きを表していることが

段 階	指導内容 ([指導]) 及び学習内容 ([学習])	指導上の留意点及び ○ $\boxed{\text{評価}}$
		理解できる。
	・演習 1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ [学習] 既習公式が別の方法で導き出せることを理解させる。	・上記 1)〜4) の型に適合していることを確認させる。 ・三角関数の極限公式である。 ○ $\boxed{\text{知識・理解}}$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を理解している。 ○ $\boxed{\text{関心・意欲・態度}}$ L'Hospital の定理により別の方法で極限の算出が可能になったことに関心をもつことができる。
	2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$	・三角関数の極限公式にもちこむことなく算出できる。 ○ $\boxed{\text{知識・理解}}$ 三角関数の極限公式にもちこむ式変形ができる。 ○ $\boxed{\text{関心・意欲・態度}}$ L'Hospital の定理により別の方法で極限の算出が可能になったことに関心をもつことができる。
	3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$	・定理の繰り返し利用が可能である。 ○ $\boxed{\text{数学的な考え方}}$ 定理の繰り返し利用が可能であることに気づくことができる。 ・e^x のほうが x^2 より速く発散することを示している。 ○ $\boxed{\text{数学的な考え方}}$ この結果が e^x のほうが x^2 より速く発散することを示していることが理解できる。

段 階	指導内容 ([指導]) 及び学習内容 ([学習])	指導上の留意点及び ○ $\boxed{\text{評価}}$
	[指導] 机間指導により理解状況を確認する。	
整 理 5分	**・L'Hospital の定理の確認** [指導] 実用性の高い定理であることを確認する。 **・次時の予定**	・質問の有無を確認する。 ・大学入試対策の実用的な定理であることを確認する。

6. 教授資料

「L'Hospital の定理」

1. 平均値の定理

「関数 $y = f(x)$ が $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能とする。このとき $(f(b) - f(a))/(b - a) = f'(c) \quad (a < c < b)$ を満たす c が存在する。」

2.Roll の定理

「関数 $y = f(x)$ が $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能とする。このとき $f(a) = f(b)$ ならば $f'(c) = 0 \quad (a < c < b)$ を満たす c が存在する。」

・この定理の内容を図示して再確認せよ。

3.Cauchy の平均値の定理

「関数 f, g は $[a, b]$ で連続で (a, b) で微分可能とする。このとき次を満たす $c(a < c < b)$ が存在する。但し $g'(x) \neq 0 (a < x < b)$ とする。$(f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)) = f'(c)/g'(c)$」

・証明のための準備

1)Rolle の定理の対偶 $g'(x) \neq 0 (a < x < b)$ ならば $g(b) - g(a) \neq 0$

2) 関数 $F(x) = f(b) - f(x) - (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))(g(b) - g(x))$ と定義する

3)$F(x)$ は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能

4)$F(x)$ の導関数

$F'(x) =$

・Cauchy の平均値の定理において $g(x) = x$ としてみる。

4.L'Hospital の定理

1) 「f,g は a の近くで微分可能で $f(a)=g(a)=0, g'(x)\neq 0$ ならば
$\lim_{x\to a} f(x)/g(x)=\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$」(0/0 型)
2) 「f,g は十分大きな（小さな）x で微分可能で
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=0, g'(x)\neq 0$ ならば
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/g(x)=\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)/g'(x)$」(0/0 型)
3) 「f,g は a の近くで微分可能で
$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty, g'(x)\neq 0$ ならば
$\lim_{x\to a} f(x)/g(x)=\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$」($\infty/\infty$ 型)
4) 「f,g は十分大きな（小さな）x で微分可能で
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=\infty, g'(x)\neq 0$ ならば
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/g(x)=\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)/g'(x)$」($\infty/\infty$ 型)

演習問題　ex1)$\lim_{x\to 0}\sin x/x$ ex2)$\lim_{x\to 0} x^2/(1-\cos x)$ ex3)$\lim_{x\to\infty} x^2/e^x$

7. Check-Sheet の結果

今回分析に使用した Check-Sheet，及びその回答の結果を以下に示す。内容は,「本時の授業内容に関する具体的項目」についての１４の質問と「本時の授業内容に関する全般的項目」についての４つの質問で構成されている。各質問項目は，３段階評価で回答を求めるものであり，３が肯定的評価，１が否定的評価，そして２が１と３の中間的評価となっている。Check-Sheet の回収数は４１であり，回答の割合が％で表示されている。

「本時の授業内容に関する具体的項目」

Q 1)Rolle の定理の内容を図によって感覚的に理解できていたか

3	2	1
56	44	0
平均		2.6

Q 2)Cauchy の平均値の定理の証明は理解できたか

3	2	1
32	63	5
平均		2.3

Q 3)Cauchy の平均値の定理と既習の平均値の定理との関わりが理解できたか

3	2	1
39	61	0
平均		2.4

Q 4)L'Hospital の定理の証明は理解できたか

3	2	1
42	56	2
平均		2.4

Q 5)Rolle の定理～Cauchy の平均値の定理～L'Hospital の定理と続くことに興味・関心を抱いたか

3	2	1
49	49	2
平均		2.5

Q 6) 演習問題 1)$\lim_{x\to 0}\sin x/x$ の算出はできたか

3	2	1
91	7	2
平均		2.9

Q 7)L'Hospital の定理を用いて前に習った $\lim_{x\to 0}\sin x/x$ の算出が可能になることについて興味・関心を抱いたか

3	2	1
71	27	2
平均		2.7

Q 8) 演習問題 2)$\lim_{x \to 0} x^2/(1-\cos x)$ の算出はできたか

3	2	1
73	22	5
平均		2.7

Q 9)L'Hospital の定理を用いて 2) を算出できることを知り従来の方法と比べて便利であると実感したか

3	2	1
95	5	0
平均		3.0

Q10) 演習問題 3)$\lim_{x \to 0} x^2/e^x$ の算出はできたか

3	2	1
81	12	7
平均		2.7

Q11)L'Hospital の定理を繰り返し用いて 3) を算出できることを知り便利であると実感したか

3	2	1
95	5	0
平均		3.0

Q12) 演習問題 3)$\lim_{x \to 0} x^2/e^x$ の結果から e^x のほうが x^2 より速く発散することの意味が把握できたか

3	2	1
85	15	0
平均		2.9

Q13) 演習問題を通して L'Hospital の定理の定理は実用性の高いものであることを実感したか

3	2	1
98	2	0
平均		3.0

Q14) この時間は関数の極限算出の復習時間としても有効であったか

3	2	1
78	22	0
平均		2.8

［本時の授業内容に関する全般的項目］

Q15) 内容に興味・関心がもてたか

3	2	1
66	32	2
平均		2.8

Q16) 内容の難易度は適切であったか

3	2	1
32	66	2
平均		2.3

Q17) 例及び演習問題は理解に役だったか

3	2	1
81	17	2
平均		2.8

Q18) 本時の内容について感想を述べよ（記述式回答）

・実用性の高い L'Hospital の定理を知り有意義であった。
・Rolle の定理の重要性が分かった。
・関数の極限算出に苦手意識がなくなった。
・このような発展的授業を増やして欲しい。
・定理の相互関係を理解するのが難しかった。
・文字中心の式変形が多かったので戸惑った。
・Cauchy の平均値の定理の証明が難しかった。
・L'Hospital の定理の定理の証明が難しかった。

8. 分析及び考察

今回の Check-Sheet の回答結果から，個々に授業のねらいが達成されているか否かを分析してみることにする。

最初のねらい 1) について。Q5 の回答をみると，定理の系統性をほぼ実感させることが

できたと分析できる。Q2とQ4の回答によれば定理の証明の十分な理解はなされていない。それにも関わらず，定理が演繹的に展開されること自体には興味・関心を抱くことができたことを示している。最もQ1から分かるようにRolleの定理についてある程度理解している状況なのだからこその結果であろう。出発点であるRolleの定理の理解状況が悪くては，この定理の系統性の理解は困難である。Q3の理解状況が高くないのも，Cauchyの平均値の定理の証明に対して十分な理解をしていないため，関わりを理解するだけの余裕がなかったからだと思われる。一般に生徒は，このような証明の連続する授業には不慣れであるため，十分な理解を求めることは難しいのかもしれない。特にCauchyの平均値の定理は，感覚的なイメージ把握がしづらい。この点が，難易度を高めているように感じられる。１節の留意点 (3) が大前提にあるので，さらに指導に工夫が求められる点である。

2) について。Q13 の回答をみるとL'Hospitalの定理に対する実用性の高さを，ほぼ完全に実感できたと分析できる。この結果には大いに満足している。Q7，Q9，Q11の回答からも同様の分析が可能である。また，Q18においても実用性の高さを評価した回答がかなりの割合でみられた。Q17の回答からも分かるように，既習のよく知られた演習問題を中心に準備したことも良い評価につながった一因であろう。

3) について。Q6は馴染みのある公式をL'Hospitalの定理を用いて算出できたか否かを問う質問である。またQ8は既習の方法とL'Hospitalの定理を用いた方法とを比較することにより，その処理の煩雑さの差異がよく感じられる問題に関する質問である。さらに，Q10はL'Hospitalの定理の繰り返し利用が可能であるという便利さを実感できる問題に関する質問であり，感覚的にも極限の結果を予想できる質問である。この極限の結果の予想が的中していることはQ12から伺い知ることができる。Q6，Q8，Q10の回答をみると，僅かな時間での指導であったにも関わらず，L'Hospitalの定理の利用方法については，十分な理解を示していると分析できる。例題での説明が有効であったのと，特にL'Hospitalの定理の適用できる型 ($0/0$ と ∞/∞) について注意を促したのが，この評価につながっていると思われる。本題のねらいではないが，Q14の回答から単にL'Hospitalの定理の紹介に留まらず，関数の極限を見直すよい機会になったことも別の観点で意義のある授業実践になったのではないかと評価できよう。

前にも触れたが，Q5によれば１節の留意点 (1)，そしてQ15によれば１節の留意点 (2) は，ほぼ満たされたと判断できる。特に (2) は，今回の授業実践の主たる目的でもあり，最も気になっていたところである。しかし，１節の留意点 (3) に関連するQ16について，十分に肯定的な回答を得られなかった点は，謙虚に猛省しなくてはならないところである。

9．今後の課題

第１著者と第２著者は，現在のところ高校数学に関する興味・関心の喚起を図る指導内容及び方法の研究を共同で行っている。内容は，高等学校の「数学Ⅲ」と大学の「微分積分学」の連携に限定したものであり，８つの指導案を作成完了している。今回の実践の分析及び考察では，概ね目的は達成できたと考える。但し，各定理の証明を十分に理解させられなかったという反省点もあるがために，一層の指導内容及び方法についての練り直しが必要である。

また，この試みは理系に適性を有する高校生には有効なものであると思われるが，広く一般的な高校生を対象にした場合は有効なものにはなりにくいことが予想される。しかし，落ちこぼれを作らないように，教える時間や内容を減らすのみでは，優れた科学者や技術

者は育てられない。能力に応じたメニューを提供すべきであると考える。勿論，世の中にはいろいろな物差しがあるべきであり，個々は多くの物差しがあってこそ生き生きとして生活できるものであると考えている。微力ながら，将来数学を学びたいと感じる高校生の意欲をかきたてられるよう自己研鑽に努めていきたい。

引用・参考文献

[1] 石黒一男・小林一章・上見練太郎・勝股修(1985)，基礎課程微分積分学，共立出版株式会社.

[2] 全国高等学校数学担当指導主事会(1944)，高等学校数学指導資料，みずうみ書房.

[3] 羽賀均・山田雅博(2003)，数学に対する興味・関心を喚起させる授業実践，岐阜数学教育研究,Vol 2，掲載予定.