岐阜数学教育研究
2010, Vol.9, 49-53

斜方投射について考察する中学生用の授業について

岩間広祥[1]，愛木豊彦[1]

本論文は，生徒が数学の有用性を感じられることを目標に開発した授業の実践報告である。その授業では斜方投射された鉄球が通過する位置を求めるという問題について考察する。そして授業の後半に計算で求めた値が正しいかどうかを実験で確かめるという活動を取り入れている。

＜キーワード＞放物線，グラフ，斜方投射，実験

1. はじめに

平成 20 年 3 月に改訂された中学校学習指導要領数学科 [1] において，数学的活動が各学年の内容に位置づけられた。[1] によると，数学的活動とは「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」を意味している。さらに [1] では,「目的意識をもって主体的に取り組む」とは,「新たな性質や考え方を見いだそうとしたり，具体的課題を解決しようとしたりすることである」とされている。

そこで中学校で学習する内容で解決できる具体的な問題を検討した結果，斜方投射を扱うことにした。

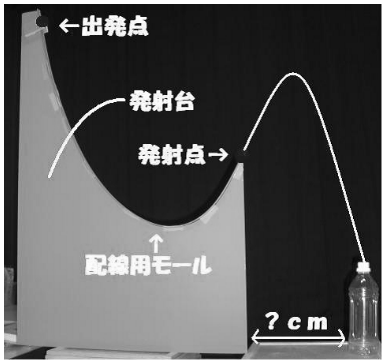
本論文で紹介する授業では，斜方投射に関する問題を生徒に示し，それを数学的に解決した後，得られた値が正しいことを実験で確かめる。

次節以降で，問題の詳細，授業展開等について報告する。

2. 授業の概要

2.1. 題材について

写真１にある発射台は発泡スチロールボードで作った土台に，配線用モールをはり，鉄球がその上を転がるようにしている。この台の出発点から転がした鉄球は発射点を飛び出した後，ほぼ放物線を描きながら動く。このとき鉄球がちょうどペットボトルの口に入るようなペットボトルの位置を数学を用いて求める。これが本論文で紹介する授業で示す問題である。



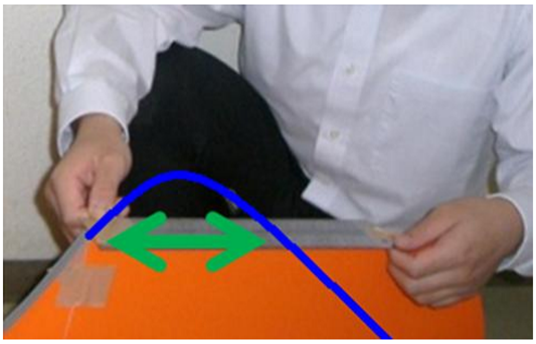
(写真１)

ペットボトルの位置を求めるために，以下の長さを計測した (図１)。

・床から発射点までの高さ　46cm
・ペットボトルの長さ　21cm
・鉄球が床に着地するまでに進んだ水平距離　27cm
・鉄球が発射された後，発射台先端の高さと同じ高さになるまでに，水平方向に進んだ距離　18cm

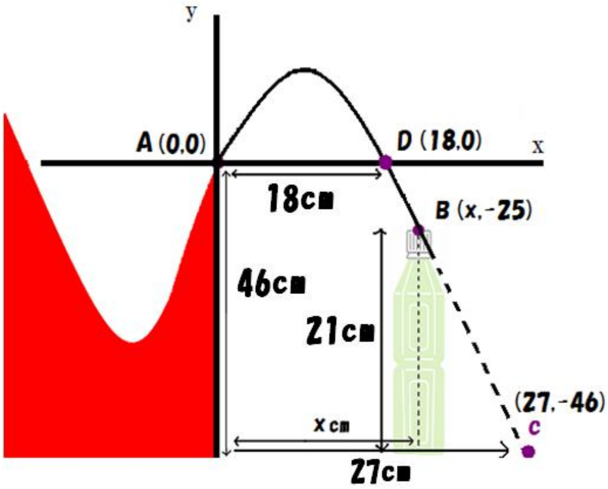
４番目の距離は写真２のような方法で計測した。

[1]岐阜大学教育学部



(写真 2)

以上のデータから，発射点が原点となるように座標軸をとり，発射点を点A，ペットボトルの口の先端を点B，鉄球の床への着地点を点C，放物線と x 軸の交点を点Dとする(図１)。



(図 1)

この座標平面上における放物線を表す方程式を求める。まず式を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。放物線が点A，C，Dを通ることからその放物線は

$$y = -\frac{46}{243}x^2 + \frac{92}{27}x \qquad (1)$$

となる。ここで，Bの x 座標を求める。y 座標が -25 なので，これを (1) に代入して，

$$-25 = -\frac{46}{243}x^2 + \frac{92}{27}x$$

となる。

この方程式を解くと，$x > 0$ より，

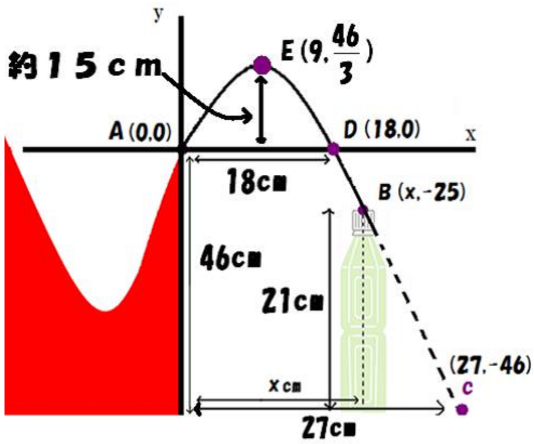
$$\begin{aligned} x &= \frac{414 + \sqrt{450846}}{46} \\ &\fallingdotseq 23.59. \end{aligned}$$

よって，発射台から 23.59cm のところにペットボトルを置けば鉄球が入る。

しかし，中学３年生は原点以外を頂点とする放物線を学習していないので，この方法で解くことができない。そこで中学３年生でも解けるように，問題で示す条件を変えることにする。(1) より

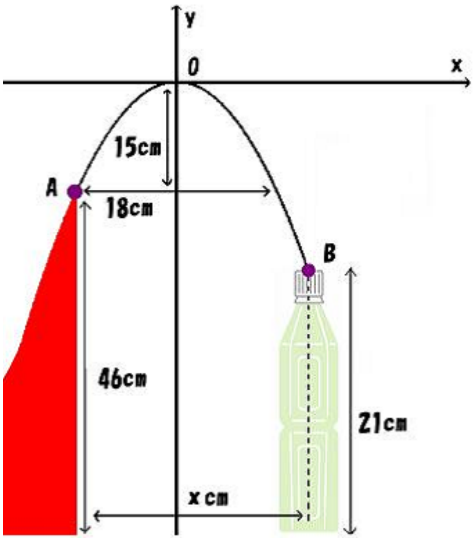
$$\begin{aligned} y &= -\frac{46}{243}x^2 + \frac{92}{27}x \\ &= -\frac{46}{243}(x-9)^2 + \frac{46}{3} \end{aligned}$$

となり，放物線の頂点Eの座標は $(9, \frac{46}{3})$ である (図２)。よって，鉄球が一番高いところにあるときの発射点からの高さは $\frac{46}{3}$　15(cm) である。



(図 2)

この 15cm を利用して，放物線の頂点が原点となるように座標軸を取り直したのが図３である。



(図 3)

図３では，放物線が y 軸対称であることから点Aの座標は，$(-9,-15)$ である。従って，放物線を表す方程式を $y=ax^2$ とおき，Aの座標を代入し a の値を求めると $a=-\frac{5}{27}$ となる。よって，放物線を表す方程式は

$$y=-\frac{5}{27}x^2. \qquad (2)$$

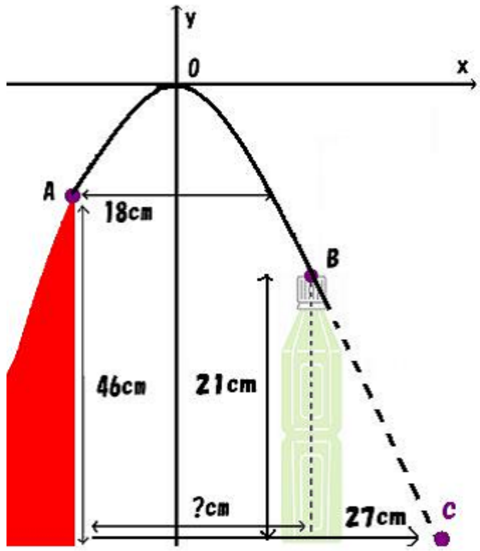
次に図３より，Bの y 座標は，15+46 − 21=40 である。これを (2) に代入し，B の x 座標を求めると，$x=\pm 6$ となり，$x>0$ より，$x=6\sqrt{6}$ である。

よって，求める長さは

$$\begin{aligned} 9+6 \qquad & 9\sqrt{6}+14.6 \\ = \ & 23.6. \end{aligned}$$

従って，鉄球が一番高いところにあるときの発射点からの高さを 15cm とすると，発射台からペットボトルへの水平移動距離は約 23.6cm になる。この値は既に求めた 23.59cm とほぼ等しく，実験でペットボトルをおくときには区別ができないくらい近い値である。そこで，図３で条件を示した場合について考えることを中学３年生を対象とする授業の題材とした。

本授業では扱ってはいないが，条件を変更しなくても，中学３年生でもこの問題を解く方法がある。まず，図４のように放物線の頂点が原点となるように座標軸を定める (図４)。



(図 4)

そして，先ほどと同様に放物線の式を $y=ax^2$ とおく。グラフの対称性から点Aの座標は $(-9, 81a)$ となる。ここで，点Cの座標は (18，324a) とおくことができる。よって，点Aと点Cの y 座標の差が床から発射台までの高さになることから，$81a-324a=46$ より，

$$a=-\frac{46}{243} \qquad (3)$$

となる。よって放物線の式は $y=-\frac{46}{243}x^2$ である。ここで，点Aの y 座標は $81a$ なので，(3) を代入して，y 座標を求めると $-\frac{46}{3}$ となる。よって点Bの y 座標は $-\frac{46}{3}-46+21=-\frac{121}{3}$ となる。そして，点Bの x 座標を求めると，

$$-\frac{121}{3}=-\frac{46}{243}x^2,$$

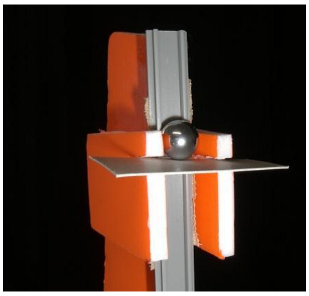
$$x=\pm\sqrt{\frac{29403}{138}}.$$

$x>0$ より，$x \quad 14.59$ である。よって点Bの座標は $(23.5,-40)$ なので，鉄球がペットボトルに入る距離は約 23.59cm である。

2.2. 実験について

2.1 節で示した発射台の作り方は，鷲見・愛木 [2] を参考にしている。本論文で紹介する

授業においては，実験者に無関係に鉄球が同じ軌跡を描くようにしなければならない。そこで [2] で示されているものにはなかった写真３のような出発点を設置することにした。この出発点を付けたことにより，鉄球の軌跡が安定し，一度ペットボトルの位置が見つかれば，それ以後，ほぼ毎回，鉄球がペットボトルに入るようになった。



(図 3)

2.3. 授業のねらい

本授業のねらいを次の２点とした。

(a) 放物線の性質や式をもとに，発射台から発射された鉄球がペットボトルに入る位置を求める活動を通して，関数の利用の仕方を理解する。

(b) 関数を利用すれば，解決できる現実の問題があることを理解する。

本授業の展開を考えるにあたり，これまで学習してきた放物線の性質を活用することに重点をおいた。

2.4. 授業の流れ

(１) 問題提示

まず，発射台から鉄球を発射した後，鉄球が入るようなペットボトルの位置を求めるという問題を提示する。

(２) 課題設定

発射台から発射される鉄球の軌跡が放物線であることと，これまでに学習した放物線の特徴をおさえる。また，発射台や発射された鉄球の描く放物線についての条件を図３のように示し，課題を「放物線の式を求め，ペットボトルに鉄球が入るような位置を計算して求めよう」と設定する。

(３) 個人追究

課題に対し，見通しがもてない生徒は以下の手順を記載したヒントカードを配る。

(a) 発射点の座標を求める。

(b) 放物線の式を求める。

(c) ペットボトル先端の y 座標と放物線の式をから，ペットボトル先端の y 座標を求める。

(d) 求めた座標から発射台とペットボトルの間の距離を求める。そして，計算で求めた値が正しいことを，実験で確かめる。

(４) 全体交流

個人追究した内容を，全体で交流する。 放物線の式を利用してペットボトルに鉄球が入る位置を求められることを理解する。そして，「これまで学習してきた関数を利用することで，解決できる問題がある」とまとめる。

3. 実践結果

講座名：「ピタゴラス位置」

実践日：平成 21 年 12 月 14 日（月）

第 4 校時

対象：中学校３年生 (33 名)

3.1. 活動の様子

(１) 実験

一人の生徒にペットボトルを適当な位置に置いて，鉄球が入るかどうかを試させた。

(２) 課題設定

発射台から発射された鉄球の動きを，動画で示し「鉄球が通った道はどのような形をしているかな？」と問いかけた後，放物線の特徴をまとめた。

(３) 個人追究

課題を提示した後，見通しが持てない生徒にはヒントカードを配布した。

(４) 全体交流

ほとんどの生徒がペットボトルの位置を計算で求めることができたが，A の座標を $(-9,-15)$ でなく，$(-9,15)$ と考えている生徒が多かった。そのために放物線の式も $y =$

$-ax^2$ とせず，$y = ax^2 (a > 0)$ と考えていた。

4. 考察

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

(１) この授業で使った関数で学習したことをできるだけたくさん書いてください。

・二次関数
・放物線の特徴
・放物線のグラフ
・$y = ax^2$ という式
・グラフが線対称であること
・座標を代入して式を求める
・球が描いた放物線がそのままグラフになる

(２) 計算で求めた値を利用して実験を行った感想を書いてください。

・計算だけじゃなく実験もできて楽しかった。
・自分が求めた数値で実際に実験してみてできたのがよかった。
・難しかったけど実験は面白かった。
・苦戦したけど最後には納得のいく答えが出たのでよかった。
・関数で求めた式の値が本当にそうなるとは驚いた。
・少しの誤差でも成功するかどうかが変わるということがわかった。

(３) 授業の感想を書いてください。

・関数を使っていることがわかった。
・最初は難しそうに感じたが計算で求めて１回で入れることができてよかった。
・関数がこのように利用できるということがわかった。
・難しかったけど説明を聞いて納得でき，理解できてよかった。
・関数ではグラフを表したり数値を求めるだけでなくグラフと図を使い，答えが出せることが分かり，楽しかった。
・他にもあると思うからやってみたいなと思った。

授業のねらいの達成度について考察する。

(a) 放物線の性質や式をもとに，発射台から発射された鉄球がペットボトルに入る位置を求める活動を通して，関数の利用の仕方を理解する。

課題追究に入ったときは見通しが持てない生徒が多かった。その後ヒントカードを使ったり，生徒同士の教えあいによって見通しを持つことができていた。そして最終的には理解できたことが，アンケートの (２) の回答「苦戦したけど最後には納得のいく答えが出た」や (３) の回答「最初は難しそうに感じたが計算で求めて１回で入れることができた」,「難しかったけど説明を聞いて納得でき，理解できてよかった」からもわかる。従って，このねらいは達成できたと考えている。

(b) 関数を利用すれば解決できるようなことがあることを理解する

アンケート回答（２）の「関数で求めた式の値が本当にそうなるとは驚いた」，アンケート回答（３）の「関数がこのように利用できるということがわかった」という回答から関数を利用できることが理解できたと考える。また，アンケート回答（３）の「他にもあると思うからやってみたいなと思った」という回答から，このねらいも達成できたと考える。

5. 今後の課題

今回の授業では，放物線の式や計算を簡単にするために，いろいろな条件を図３のような形で提示した。 しかし 2.1 節で述べたように，この条件の示し方には不自然な点がある。従って，2.1 節の最後に示した条件を提示する授業も行ってみたい。

引用文献

[1] 文部科学省，2008，中学校学習指導要領解説数学編，教育出版株式会社.
[2] 鷲見浩章・愛木豊彦，2009，物体の水平投射を題材とした教材の開発と実践，岐阜数学教育研究，vol.8，pp. 95-102.