岐阜数学教育研究
2009, Vol.8, 95-102

物体の水平投射を題材とした教材の開発と実践

鷲見浩章[1], 愛木豊彦[2]

数学と物理学には様々な物理学の法則が数式によって表されているなど，密接な関係がある。物体の水平投射においても，物体が描く軌跡は放物線となり，中学生でも理解可能な関係が存在する。本稿で紹介する鉄球を転がすジェットコースター模型の作成において，鉄球がレールからコースアウトしないように作るためには，このような知識を必要とする。そのことに気づき，計算によって求めた数値を模型作成に生かすことで，数学と身近な事象や理科との結びつきを実感できると考えた。ここでは，この教材の実践の内容と結果，および考察について報告する。

＜キーワード＞水平投射，放物線，2 次関数，ジェットコースター模型

1. はじめに

中学校学習指導要領（[1]）における，数学科の目標は「事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとともに，数学的活動の楽しさや数学のよさを実感し，それらを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てる。」である。これから分かるように，今日，数学的活動がより重視されている。[1] によると，数学的活動とは,「数や図形の性質などを見いだす活動」,「数学を利用する活動」,「数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動」に分類されている。この中でも，特に「数学を利用する活動」に焦点を当てた教材の開発を行うことにした。

また，2008 年に学習指導要領が改訂された背景には，OECD による PISA 調査の結果がある。その報告によると，知識･技能を活用する問題に課題があるとされている。この課題を解決するために，数学と理科とを結びつけた教科横断的な題材を扱うことにした。これにより，活用する能力を高めるとともに，数学の有用性を感じることができるのではないかと考えた。

教材開発に際し，特に「数学を日常へ戻す」ということを意識した。具体から数学を取り出し，その数や式の意味などについて考察するだけでなく，その考察した数や式を用いて，日常での課題を解決していく。例えば，数学を使ってもの作りをし，そのことで目標が達成できれば，生徒にとって数学の有用性を感じる良い体験となるであろう。そこで，物理現象を数学によって予測し，模型を作成し，実験を行うことを通して，数学の利用の仕方を学ぶことができる教材を開発した。

2. 授業の概要

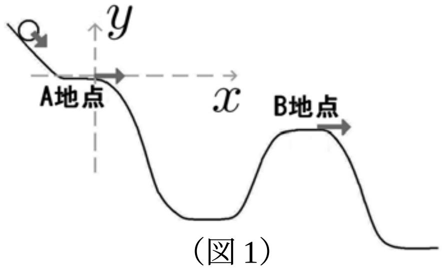
2.1. 題材について

今回の実践では，ジェットコースター模型の作成を題材として扱った。このジェットコースター模型とは，発泡スチロール板からコースを切り出し，配線用モールのふたをレールとして敷き，その上で鉄球を転がすというものである。コースの作り方は,「おもしろ実験・ものづくり事典 [2]」を参考にした。

コース作りで問題となるのは，図 1 の A 地点と B 地点のようにコースが水平になり，そ

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

こから下り坂になる場所である。A 地点や B 地点で，鉄球は水平投射される。水平投射の軌跡よりもコースが下にあると，鉄球がレールから浮いてしまいコースアウトしやすくなる。よって，A 地点や B 地点から先の下り坂を設計するためには，鉄球が描く放物線よりもコースが上になるようにしなければならない。



（図 1）

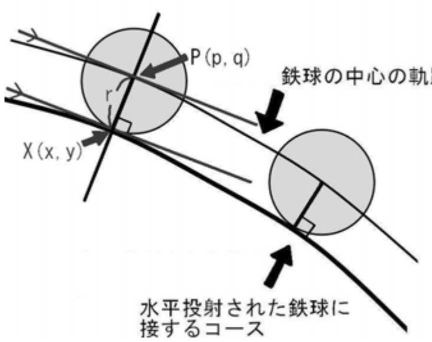
ここで，平面において鉄球を円，コースを曲線として考える。水平投射されたときの鉄球の中心を原点とし，その点を通って水平方向に x 軸を，鉛直方向に y 軸をとる。重力加速度を g m/s^2，水平投射されたときの速さを v_0m/s，投射されてからの時間を t 秒とすると，t 秒後の鉄球の中心の位置 (x, y) は，

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

となる。よって，鉄球の中心が描く軌跡は

$$y = -\frac{g}{2{v_0}^2}x^2 \tag{1}$$

である。ここで注意しなければならないのは，この式は鉄球の中心の軌跡を表しているが，コースの位置を表していないということである。



（図 2）

コースの位置は，$a = \frac{g}{2{v_0}^2}$ とおくと次のように表される。

定理 1 コースの位置を (x, y) とすると，媒介変数 $p > 0$ によって，(x, y) は次の式で表される。

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2a}\tan\theta_p - r\sin\theta_p \\ y = \frac{1}{4a}\tan^2\theta_p + r\cos\theta_p \end{cases} \tag{2}$$

ただし，θ_p は $\tan\theta_p = 2ap, 0 \leq \theta_p < \pi$ を満たすものとする。

この定理を証明する前に，次の補題を示す。

補題 1 鉄球が通過する領域を D とする。つまり，

$$D = \left\{ (x, y) \middle| \begin{array}{c} x \geq 0, (x-p)^2 + (y-q)^2 \leq r^2, \\ q = ap^2, p \geq 0 \end{array} \right\}$$

とすると，

$$D = \left\{ (x, y) \middle| \begin{array}{c} (x, y) = (p, q) + d(\cos\theta, \sin\theta), \\ -r \leq d \leq r, \tan\theta = \frac{1}{2ap}, \\ 0 \leq \theta < \pi, q = ap^2, p \geq 0 \end{array} \right\}$$

（証明）

（$\supset$）は明らかである。

（$\subset$）を示す。

$\forall (x, y) \in D$ とすると $x \geq 0$ である。また，

$$\exists p \geq 0 \quad \text{s.t.}$$
$$(x-p)^2 + (y-q)^2 \geq r^2, q = ap^2$$

ここで，

$$y = -\frac{1}{2at}(x - t) + at^2 \tag{3}$$

となる t が存在することを示す。

(3) を満たす t が存在すると仮定すると，

$$\begin{aligned} 2aty &= -x + t + 2a^2t^3, \\ 2a^2t^3 + (1 - 2ay)t &= x, \\ t^3 + \frac{1 - 2ay}{2a^2}t &= x, \\ t(t^2 - \frac{2ay - 1}{2a^2}) &= x. \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，

$$g(t) = t(t^2 - \frac{2ay-1}{2a^2})$$

とおき，$g(t) = x$ となる t が存在することを示す。$g(t)$ を微分すると，

$$g'(t) = 3t^2 - \frac{2ay-1}{2a^2}.$$

I）$2ay - 1 < 0$ のとき

$g'(t) > 0$ となり，$g(t)$ は単調増加関数である。よって，$x \geq 0, g(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} g(t) \to \infty$ なので，中間値の定理より，

$$\exists_1 t_1 > 0 \quad \text{s.t.} \quad g(t_1) = x.$$

II）$2ay - 1 = 0$ のとき

$g(t) = t^3$ であるから，g の増減表は，

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

となり，$g(t)$ は単調増加関数である。よって，$x \geq 0, g(0) = 0, \lim_{t\to\infty} g(t) \to \infty$ なので，中間値の定理より，

$$\exists_1 t_1 > 0 \quad \text{s.t.} \quad g(t_1) = x$$

III）$2ay - 1 > 0$ のとき

$g'(t) = 0$ を解くと，$t = \alpha, \beta$ ただし，$\alpha = -\sqrt{\frac{2ay-1}{6a^2}}, \beta = \sqrt{\frac{2ay-1}{2a^2}}$ である。よって g の増減表は，

t	$\cdots$	α	$\cdots$	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$g(t)$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(\beta)$	$\nearrow$

よって，$x \geq 0, g(0) = 0, \lim_{t\to\infty} g(t) \to \infty$ なので，中間値の定理より，

$$\exists_1 t_1 > 0 \quad \text{s.t.} \quad g(t_1) = x$$

従って，(4) を満たす $t_1 > 0$ がただ 1 つ存在することがわかる。

次に，この t_1 において，

$$(x - t_1)^2 + (y - a{t_1}^2)^2 \leq r^2 \qquad (5)$$

であることを示す。そのために，

$$(x - t_1)^2 + (y - a{t_1}^2)^2 \leq (x - p)^2 + (y - ap^2)^2$$

を示せばよい。ここで，

$$h(p) = (x - p)^2 + (y - ap^2)^2$$

とおくと，

$$\begin{aligned} h'(p) &= -2(x - p) - 4at(y - ap^2) \\ &= -2x + 2p - 4ayp + 4a^2p^3 \\ &= 2(2a^2p^3 + (1 - 2ay)p - x) \end{aligned}$$

先に示したように，$2a^2p^3 + (1-2ay)p - x = 0$ は $p > 0$ でただ一つの解 t_1 をもつ。よって，$p \geq 0$ での h の増減表は，

t	0	$\cdots$	t_1	$\cdots$
$h'(p)$		$-$	0	$+$
$h(p)$	$h(0)$	$\searrow$	$h(t_1)$	$\nearrow$

となり，$h(t_1)$ は $h(p)$ の最小値である。従って，

$$h(t_1) \leq h(p)$$

すなわち，

$$(x - t_1)^2 + (y - a{t_1}^2)^2 \leq (x - p)^2 + (y - ap^2)^2$$

が成り立つ。

ここで，$(x - t_1, y - 2at_1) = d(\cos\theta, \sin\theta)$, $0 \leq \theta < \pi$ とおくと，

$$|(x - t_1, y - 2at_1)| = |d||(\cos\theta, \sin\theta)| = |d|.$$

式 (5) より，

$$|(x - t_1, y - 2at_1)| \leq r$$

であるから，$|d| \leq r$. よって，

$$-r \leq d \leq r.$$

また，

$$\tan\theta = \frac{y-2at_1{}^2}{x-t_1} = -\frac{1}{2at}.$$

ゆえに,（⊂）が成り立つ。 ∎

次に，定理 1 を証明する。

（定理 1 の証明）

(x,y) を鉄球に接するようなコースを表す曲線上の点とする。$(x,y)\in D$ なので，補題 1 より，

$\exists_1 p>0$　s.t.

$$(x,y)=(p,ap^2)+d(\cos\theta,\sin\theta),$$
$$\tan\theta=-\tfrac{1}{2ap}, -r\le d\le r, 0\le\theta<\pi.$$

ここで，$\tan\theta>0, 0\le\theta<\pi$ より $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ である。従って，$\cos\theta>0,\sin\theta>0$ である。また，(x,y) は D の境界上の点なので，$d=r$ または $d=-r$ である。(x,y) は (p,ap^2) から見て左側かつ下側にあるので $d=-r$ である。すなわち，

$$(x,y)=(0,ap^2)-r(\cos\theta,\sin\theta)$$

となる。ここで，$\theta_p=\frac{\pi}{2}+\theta$ とおくと，

$$\tan\theta_p=\tan(\theta+\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{\tan\theta}=2ap.$$

よって，

$$p=\frac{1}{2a}\tan\theta_p.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2a}\tan\theta_p - r\cos(\theta_p-\frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{1}{2a}\tan\theta_p - r\sin\theta_p, \\ y &= a(\frac{1}{2a}\tan\theta_p)^2 - r\sin(\theta_p-\frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{1}{4a}\tan^2\theta_p + r\cos\theta_p. \end{aligned}$$ ∎

この曲線を表す式 (2) において r を 0 に近づければ，式は $y=ax^2$ に近づく。従って，本稿で紹介する授業においては，r が十分小さいと考え，鉄球と接するコースを鉄球の中心が描く放物線とみなすことにした。

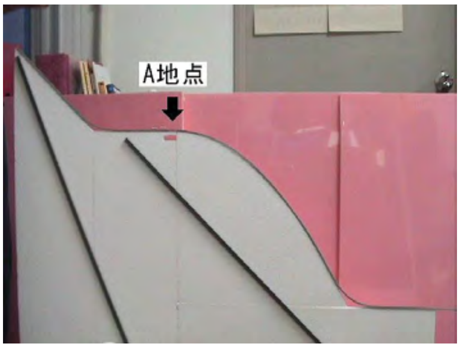
上で述べた内容を生徒に示したり，実験で確かめたりすることで，生徒に数学と理科の結びつきを感じさせることができると考えた。特に，放物線は中学校第 3 学年で学習する内容である。そこでは，実際に物体が放物線を描きながら落ちていく様子を実験したり観察したりすることはない。これらの実験や観察をすることで，放物線の存在を実感し，数学に対する有用性を理解しやすいと考えたこともこの題材を選んだ理由の一つである。

2.2. 授業の流れ

＜1 日目＞

Ⅰ 実験

ジェットコースター模型の見本を見せ，その上で鉄球を転がし，2 日間の活動のイメージを持たせる。次に，滑らかな曲線のコース（写真 1）と角ばった直線のコース（写真 2）でも同じように鉄球が転がるかという実験を行う。その結果，滑らかな曲線コースでは鉄球は最後まで転がりやすく，角ばった直線のコースでは最後まで転がりにくいことを確認する。これを受け，なぜ見た目は似ているのに，鉄球が最後まで転がる割合が大きく違うのか，その原因を考える。そして，鉄球がコースからとび出してしまうことが原因であるということを見つける。



（写真 1）

（写真 2）

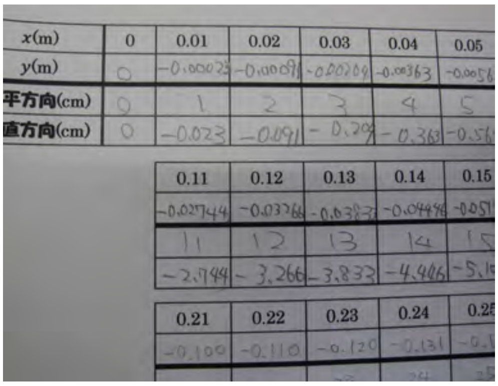
II 水平投射について

授業者の解説によって，水平投射という物理現象について知り，とび出す速さが am/s のとき，水平方向の移動距離を xm，垂直方向への移動距離を ym とすれば，$y=-\frac{9.8}{2a^2}x^2$ が成り立つことを知る。この段階では，式の意味を読み取ることは難しいであろうと考えたので，練習問題を準備し，式の使い方を理解させる。

III ジェットコースター模型の作成 (1)

写真 1 と同じような形のコースを作成する。まず，写真 1 における A 地点までのコースを作り，この地点を通過する鉄球の速さをビースピと呼ばれる簡易速度計測器を用いて測定する。このとき，ビースピに表示される速さは km/h であるが，水平投射の式に用いる速さは m/s である。また，コース作成に用いる長さの単位は cm の方が便利である。このように，いくつかある長さの単位をすべて m に変換して考えていかなければならない。そのため，水平投射の式に $x=0.01,0.02,0.03,\cdots$ を代入し，y の値を求め，水平方向に 1cm ずつ移動したときの鉛直方向への移動距離 (cm) を表にする。

そして，表から，方眼紙に座標をとり，鉄球の動く軌跡を描く。鉄球の軌跡は，滑らかな曲線になることを II の段階で知っているため，定規を用いて直線的に結ぶのではなく，滑らかな曲線で結んでいく。この軌跡を描いた方眼紙を発泡スチロール板に貼り，放物線に沿ってコースを切り出す。このコースにレールとなる配線用モールを取り付ける。



x(m)	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
y(m)	0	−0.00023	−0.00091	−0.00209	−0.00363	−0.0056[illegible]
平方向(cm)	0	1	2	3	4	5
直方向(cm)	0	−0.023	−0.091	−0.209	−0.363	−0.56[illegible]

0.11	0.12	0.13	0.14	0.15
−0.02744	−0.03266	−0.03833	−0.04446	−0.051[illegible]
11	12	13	14	15
−2.744	−3.266	−3.833	−4.446	−5.1[illegible]

0.21	0.22	0.23	0.24	0.2[illegible]
−0.100	−0.110	−0.120	−0.131	−0.[illegible]

(表 1)

IV ジェットコースター模型の作成 (2)

写真 1 と同じようなコースを作成できた生徒から，ループやカーブなども加えた，生徒が考えるオリジナルのコースの計画を立て，その先のコースを作る。

下り坂は，ジェットコースター模型の作成 (1) での活動を応用し，同じ手順を踏んで作成していく。しかし，同じような計算を何度も行って表を埋めるのは面倒であり，計算だけで授業が終わってしまう。これは，式を活用するという授業の意図に反しているため，2 つ目以降の下り坂に関しては，ビースピでの測定結果をコンピュータに入力すると自動で対応表が作成できるよう用意し，これを用いて水平方向へ 1cm 移動する毎の鉛直方向への移動距離を求めていくこととした。

また，コースの中にはループやカーブを作りたいという場合には，これも，放物線を扱うという本授業のねらいとはずれているため，生徒だけに考えさせるのではなく，補助の学生とともに作り方を考えることとした。

＜2 日目＞

V ジェットコースター模型の作成 (3)

1 日目に計画し，作り始めた模型に下り坂をもう一つ作るなど，引き続きオリジナルのジェットコースター模型を作る。

VI 発表会

2日間かけて作ったジェットコースター模型について，下り坂での鉄球のとび出す速さやそれから求めることができる水平方向と垂直方向への移動距離の関係式，その他工夫したこと，こだわったところなどをまとめ，発表を行い，実演する。

2.3. 授業のねらい

この教材を実践するにあたり，授業のねらいを次の3つとした。

(a) 水平投射の様子を関数のグラフとして表すことで，その軌跡を描くことができる。
(b) 実験や工作を通して，水平投射の式の意味が理解できる。
(c) 水平投射の式を工作に活用することで，理科と数学の関連を知る。

3. 実践結果

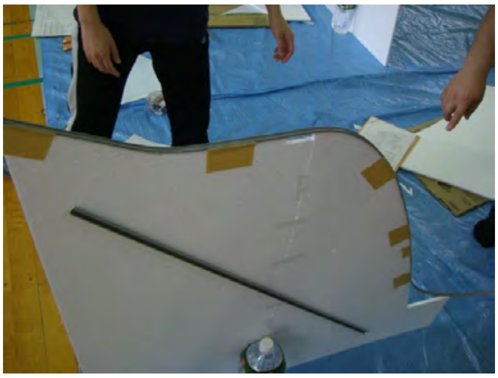
以下の通り，実践を行った。

場所：岐阜県各務原市立中央小学校
日程：平成21年8月6日，7日
対象：各務原市内の中学校1，2，3年生(7人)

3.1. 活動の様子

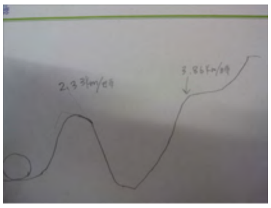
1日目は，ジェットコースター模型を作る練習も兼ね，全員が同じような形（写真1におけるA地点の先の下り坂まで）のコースを作った。計算の回数が多く，また，単位の変換も何度も行わなければならなかったため，生徒は大変だったが，表を埋め，コースを作ることができていた。また，日々の経験をもとに，写真1におけるA地点での速さが遅くなれば，下り坂は急になるのではないかと予想する生徒もおり，この生徒は，A地点での鉄球の速さを遅くする工夫をしながらコースを作ることができた（写真3）。

そして，そのコースを作り終えた生徒から，その先のコースを考え計画し，作成に取り組んだ。「山を作りたい」,「ループを作りたい」,「カーブを作りたい」などの考えを図で表し，それぞれが，試行錯誤を繰り返し，作成していった。



（写真3）

山を作りたいという生徒は，山を作るたびに鉄球が上ることができる高さを調べ，その頂上での鉄球の速さを測定，記録し（写真4），表から下り坂となる放物線を導き，コースを作っていた（写真5）。



（写真4）

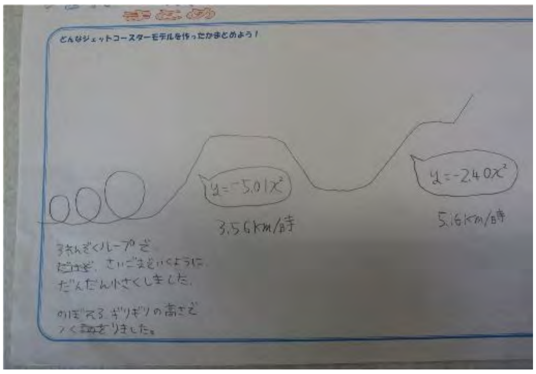
（写真5）

ループやカーブを作りたいという生徒は，学生とともに作り方を考え，形にしていった。

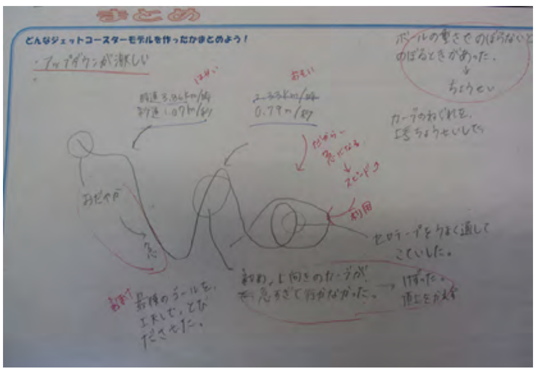
このように，各々の生徒が工夫を凝らし，生徒独自のコースを作ることができた。

（写真6）

写真６のコースを作った生徒は，いくつも山のあるコースを作った。この山を作るたびに，鉄球がどこまで上ることができるのかを調べ，何度も山の頂上で鉄球の速さを測定し，放物線の下り坂を作った。　２日間のまとめとして，最後に生徒が自分がどのようなコースを作ったのかということを発表する時間を設けた。ここでは，特に鉄球の速さはどれだけになり，どのような放物線の下り坂を作ったのかということに着目して発表を行った。発表をするにあたり，生徒はグループを組んでいた学生と測定結果と作成したコースについてまとめていった。その中で，鉄球の速さをもとにそれぞれの放物線の式を表したり（写真７），「鉄球の速さが速いほど緩やかな下り坂を作成しなければならない」と，速さと下り坂の傾斜の関係に気がついたりする生徒も見られた（写真８）。



（写真７）



（写真８）

3.2. 生徒の感想

- 大変なことや面倒なこともあったけど，図工みたいなかんじがあって，思ってたよりも楽しかった。
- 今回の講座をやって，数学はおもしろいと思いました。少し好きになりました。
- 下るところが放物線と関係あるとは思わなかったので，数学はおもしろい教科だと感じました。これからの数学は今より楽しみな気持ちを持って勉強したいです。
- 放物線のところがすごく難しくて失敗したり，計算ミスなどで大変だったけどすごくたのしかったです。

4. 考察

本授業のねらいの達成度について考察する。

(a) 水平投射の様子を関数のグラフとして表すことで，その軌跡を描くことができる。

生徒たちは，水平方向と垂直方向への移動距離の関係について，学習プリントの表に示された x の値における y の値を求め，座標をとりグラフをかき，見本のような曲線が良いということから座標を滑らかに結び，放物線のグラフを描くことができていた。

(b) 実験や工作を通して，水平投射の式の意味が理解できる。

生徒たちは，単位に注意して速さと水平方向の移動距離を公式に代入し，垂直方向の移動距離を求めることができるようになった。また，アンケートに載せた速さによる放物線の違いを問う評価問題で，全員が正答することができた。

(評価問題)

これらことから，このねらいは，十分達成できたと考える。

(c) 水平投射の式を工作に活用することで，理科と数学の関連を知る。

アンケートに，計算によって実験が成功したことなどから数学と理科の関連を実感できたという感想があった。この生徒の他にも，速さと式とコースの関係を話しながら活動する生徒が多くいた。これらのことから，このねらいは達成できたと考える。

5. 今後の課題

今回の実践では，生徒が模型を作成する際，コースのねじれやレールの連結の不具合などで，鉄球が最後までたどり着かないことが度々あった。その原因としては，コースの土台となる発泡スチロール板の強度が弱かったことや，レールの連結部でのわずかな凹凸やレールの傾き具合といった技術的に難しいことが挙げられる。実際，これらのねじれや凹凸を直していくことに時間を費やし，目標としていた形にたどり着けなかった生徒もいた。そのため，コースの形となる発泡スチロール板やコースの材料について再検討し，技術的にももっと簡単に作成できるような作り方を考えていく必要がある。そうすることで，放物線について考えを深めることや，コースの作成に生徒が集中できるのではないかと考える。

また，今後は，本講座での成果と反省を生かし，数学と他教科を結びつけた，生徒が興味関心を抱き，数学のおもしろさや有用性を感じることができる教材を考えていきたい。

引用文献

[1] 文部科学省，2008，中学校学習指導要領解説数学編.

[2] 左巻健男，内村浩，2002，おもしろ実験・ものづくり事典，東京書籍.