岐阜数学教育研究
2009, Vol.8, 82-88

統計領域に関する野球を題材とした教材開発と実践

竹内洋平[1], 愛木豊彦[2]

高校数学を用いて，スポーツに現れる問題を解決できるような授業案を開発した。題材は野球の打順であり，得点の期待値の計算やシミュレーションゲームによって考察を進めていく。ここでのねらいは，確率モデルによる現象の解析を通して，高校数学の有用性を知り，学習する意義を実感することである。本稿では，2009 年 8 月に実施した高校数学セミナーの内容を紹介し，生徒の様子やアンケートをもとに実践結果を考察する。

＜キーワード＞数理モデル，期待値，シミュレーション，打順

1．はじめに

高校の学習内容と社会との関わりを，できるだけわかりやすく高校生に説明しなければならない。このことが高校における数学教育の重要な研究課題の一つだと考えている。そこで着目したのが数理モデルである。ある問題が生じたとき，それを表現する数理モデルを作成し，分析することは，現代社会における有効な方法である。特に，確率を用いたモデルはいろいろな場面で実際に用いられている。

従って，確率モデルを作ったり，分析したりすることを通して，高校数学と社会とのつながりが実感できるのではと考えて，それを題材とする教材を開発することにした。具体的には，野球の打順について考察することが授業の題材である。授業案作りで参考にしたのは，[1,2,3] であり，特に [2,3] では打順に関するシミュレーションの結果が紹介されている。

考える問題は,「どのような打順が最も多く点がとれるだろうか。」である。本授業では，３つのモデルを示し，そのモデルごとに最適な打順について考える。

３つのモデルに対する考察において，出塁率，長打率など打者の成績のみに注目し，それらを確率とみなす。３つのモデルの詳細は，第２節で述べる。まず第１のモデルでは，出塁率のみを考え，得点の期待値が最も高い場合を求める。第２のモデルでは，打率やホームランも要素としている。このモデルは複雑なため，文字による証明は難しい。従って，シミュレーションによって，問題の解決を目指す。第３のモデルは，第１のモデルにホームランを加えたものである。ただし，このことにより，モデルが複雑になっているので，他の要素を一部削除している。ここでは，出塁率などのデータを文字で与えると，得点の期待値を表す式が複雑になり，そのままで大小を比べることが難しかった。そこで，データを具体的な数値として与えたいくつかの場合に対し，得点の期待値を比較した。

このように３つのモデルを扱うことにしたのは，与えられたモデルを考察するだけでなく，モデルを作成する能力も高めたいと考えたからである。さらに，３つのモデルを扱う方法はすべて異なるものにした。その理由は，第２，第３のモデルにおいて，数学的な考察が難しかったことと，モデルについて考えるときにはいろいろな方法があることを知って

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

欲しかったからである。結果が簡単にまとまらなくても，結果を示す方法があることを伝えたかった。

本教材においては，証明の過程で数学Bや，数学IIIで学習する数列の極限を扱う。そこで，高校で学習する数列と確率のつながりを感じ，高校数学を学習することの意義を理解できるのではないかと考えた。

実践の場は，岐阜県が主催する高校数学セミナーである。この授業における目標を「野球において，証明やシミュレーションを通して，より良い打順について考察する。」とした。

本節の最後に授業の進め方について述べる。本授業では，テキストを作成し，参加生徒が各自のペースでそのテキストをもとに学習を進めていく。つまり，一斉授業の形式をとらない。その理由は次の通りである。

・自ら望んで参加した生徒なので，受け身が中心の学習よりも，自主的に学べる形式の方が積極的になれると考えた。

・参加生徒は学校も学年も異なるので，学習状況は一様ではない。従って，全体が足並みをそろえて勉強を進めるのは非常に困難だと判断した。

2．モデルについて

講座で扱うモデルとその結果を紹介する。

2.1　出塁率のみを考慮したモデルの性質

まず「人数２人，ベース２つ，１アウトで終了，１イニング，出塁は１塁打のみでホームランはなし」という野球のモデルを考える。そして，２人の選手A，Bに対し，Aの方がBより出塁率が高いとする。この場合，Aを先にしてBを後にしたA→B→A→B→A→…という打順のほうが，Bを先にしてAを後にしたB→A→B→A→B→…という打順よりも得点の期待値が高い。このことを以下で証明する。

（証明）

Aの出塁率を a，Bの出塁率を b，$0<b<a<1$，とする。

(i) 打順A→B→A→B→A→…について

・得点が0点のとき

Aがアウトになるか，Aが出塁し，Bがアウトになるかのどちらかなので，

$(1-a)+a\times(1-b)=1-ab$

・得点が1点のとき

Aが出塁し，さらに次のBが出塁し，そしてAがアウトになる場合なので，

$a\times b\times(1-a)=ab(1-a)$

以下同様に考えられる。

得点	0	1	2	3	$\cdots$	計
確率	$1-ab$	$ab(1-a)$	$a^2b(1-b)$	$a^2b^2(1-a)$	$\cdots$	1

得点の期待値を E とすると，

$E=ab(1-a)+2a^2b(1-b)+3a^2b^2(1-a)+4a^3b^2(1-b)+\cdots$ となる。

ここで，第 n 項までの和を E_n とおく。

(a)$n=2m-1$（$m\in N$）のとき

$$\begin{aligned}E_n &= ab(1-a)+2a^2b(1-b)+3a^2b^2(1-a)+\\ &\quad \cdots+(2m-1)a^mb^m(1-a)\\ &= ab+a^2b+a^2b^2+\cdots+a^mb^m\\ &\quad -(2m-1)a^{m+1}b^m\\ &= (ab+a^2b^2+\cdots+a^mb^m)\\ &\quad +(a^2b+a^3b^2+\cdots+a^mb^{m-1})\\ &\quad -(2m-1)a^{m+1}b^m\\ &= \frac{ab\{1-(ab)^m\}}{1-ab}+\frac{a^2b\{1-(ab)^{m-1}\}}{1-ab}\\ &\quad -(2m-1)a^{m+1}b^m\end{aligned}$$

よって，$\lim_{m\to\infty}E_{2m-1}$

$$\begin{aligned}&= \lim_{m\to\infty}[\frac{ab\{1-(ab)^m\}}{1-ab}+\frac{a^2b\{1-(ab)^{m-1}\}}{1-ab}\\ &\quad -(2m-1)a^{m+1}b^m]\\ &= \frac{ab(1+a)}{1-ab}\end{aligned}$$

(b)$n=2m$（$m \in N$）のとき

$$
\begin{aligned}
E_n &= ab(1-a)+2a^2b(1-b)+\\
&\quad 3a^2b^2(1-a)+\cdots+2ma^{m+1}b^m(1-b)\\
&= ab+a^2b+a^2b^2+\cdots+a^{m+1}b^m\\
&\quad -2ma^{m+1}b^{m+1}\\
&= (ab+a^2b^2+\cdots+a^mb^m)\\
&\quad +(a^2b+a^3b^2+\cdots+a^{m+1}b^m)\\
&\quad -2ma^{m+1}b^{m+1}\\
&= \frac{ab\{1-(ab)^m\}}{1-ab}+\frac{a^2b\{1-(ab)^m\}}{1-ab}\\
&\quad -2ma^{m+1}b^{m+1}
\end{aligned}
$$

よって，$\lim_{m\to\infty} E_{2m}$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{m\to\infty}\Big[\frac{ab\{1-(ab)^m\}}{1-ab}+\frac{a^2b\{1-(ab)^m\}}{1-ab}\\
&\quad -2ma^{m+1}b^{m+1}\Big]\\
&= \frac{ab(1+a)}{1-ab}
\end{aligned}
$$

(a)，(b) より，$E=\frac{ab(1+a)}{1-ab}$

(ii) 打順 B → A → B → A → B →⋯について
(i) の結果は，a，b の大小には無関係なので，a と b を入れ換えた値が E となる。
よって，$E=\frac{ab(1+b)}{1-ab}$

(i),(ii) より，$0<b<a<1$ から，A → B → A → B → A →⋯という打順のほうが，B → A → B → A → B →⋯という打順よりも得点の期待値が高いことがわかる。 □

同様にして,「人数３人，ベース２つ，１アウトで終了，１イニング，出塁は１塁打のみでホームランはなし」という野球のモデルにおいても，出塁率の高い順に選手を並べた打順が，得点の期待値が最も高いことが証明できる。

2.2 シミュレーションゲーム

「人数９人，ベース４つ，３アウトで終了，５イニング，出塁は１塁打〜ホームランまですべてある」というより野球に近いモデルを考える。このモデルは計算で考えるのは複雑なため，シミュレーションゲームをすることで最高の打順について考察することとした。

シミュレーションゲームを行うためには，スピナーを作成する。スピナーとは円グラフを台紙に張り付けたルーレットのようなものである。１人の選手につき，出塁を表す円グラフ（図１）と出塁の仕方を表す円グラフ（図２）の２種類を作成し，台紙の表と裏にそれぞれ貼り付ける。選手は９人で考えるため，９つのスピナーを用いて，それを並び替えてシミュレーションゲームをする。１つの打順につき３回ほど試行を行い，それを繰り返して考えていくこととした。図３のように，出塁率を使わなければ１つのスピナーで上と同様なことができる。しかし，本授業では出塁率をキーワードにしているので，作業時間は多少増加するが，１人の打者に対し２つのスピナーを用いることにした。

図１

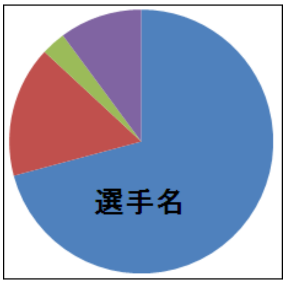

図２

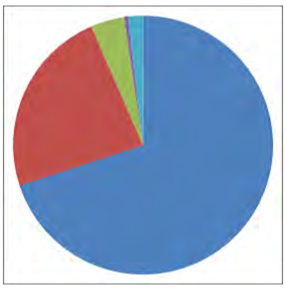
図３

2.3　ホームランを考慮したモデル

2.1 節で紹介したモデルにおいては，出塁率の高い順に選手を並べた打順が最も得点の期待値が高いことがわかったが，2.2 節で紹介したモデルにおいてシミュレーションゲームを行ったところ，必ずしも出塁率が高い順に選手を並べた打順が最も得点が入りそうだという結論にはならなかった。その要因は，出塁の中にはホームランなどの長打があるため，それが関係しているのではないかと考えた。

そこで,「人数２人，ベース２つ，１アウトで終了，１イニング，１回りで終わり，出塁は１塁打とホームランがある」,「人数３人，ベース２つ，１アウトで終了，１イニング，１回りで終わり，出塁は１塁打とホームランがある」というように，ホームランを考慮したモデルについて考える。

表 1 のようにヒットの確率は同じだが，ホームランの確率が A → B → C の順で高いときを考える。表 2 は，各打順における得点の期待値をまとめたものである。2.1 節で紹介したモデルでは，出塁率が高い順に選手を並べた打順が最も期待値が大きかったが，このモデルではそうならないことが表 2 からわかる。

	アウト	ヒット	ホームラン	出塁率
A	0.3	0.5	0.2	0.7
B	0.4	0.5	0.1	0.6
C	0.5	0.5	0.0	0.5

表 1

打順	期待値
A → B → C	0.625
A → C → B	0.655
B → A → C	0.575
B → C → A	0.605
C → A → B	0.535
C → B → A	0.535

表 2

この節のモデルは複雑なので，どのような打順が得点の期待値が高いかを文字を使ってまとめることができなかった。従って，ここでは具体的な数値のときのみを考えた。

3．授業実践について

3.1 授業のねらい

「証明」,「シミュレーション」,「モデル作り」をキーワードにした授業案におけるねらいは次の３つである。

(A) **打者の出塁率のみを考慮したモデルの性質について理解し，証明することができる。**

(B) **打者の出塁率と出塁の仕方のみを考慮したモデルにおいて，シミュレーションゲームをする活動を通して，最高の打順を見つけることができる。**

(C) **現象を単純化して，理論やシミュレーションで分析するという過程を理解し，自分でもモデルを作ることができる。**

3.2 実践方法

場　所　：岐阜大学教育学部
日　程　：平成 20 年 8 月 1 日，2 日の 2 日間
対象生徒：中学校 3 年生～高校 3 年生
　　　　　1 日目 (50 人)，2 日目 (46 人)
教材名：「☆めざせ　監督の星☆」
授業の流れ

1 日目の目標は，2.1 節で紹介したモデルの性質を証明することである。そのために，高校で使用されている教科書を参考に本セミナー用のテキストを作成した。テキストの構成は次の通りである。

1. 野球と出塁率
2. 確率
3. 野球と確率　証明する命題の紹介，得点の期待値
4. 数列　等比数列の性質
5. 極限　無限等比級数の求め方
6. 期待値と数列の極限　得点の期待値を求める
7. 野球と確率 part2　人数を 3 人としたときのモデルにおける得点の期待値

本テキストにおいて第6章まで全員が理解することを目標とし，第7章は早く終わった生徒を対象とした。その内容は，2.1節で示したモデルで，人数が3人にした場合に対する考察である。このモデルにおいても，3人の選手を出塁率の高い順で並べる打順が，最も得点の期待値が高いことがわかる。

2日目に，2.2節で紹介したシミュレーションゲームを行う。生徒が興味をもてるよう2008年のメジャーリーグと日本プロ野球選手のデータを用意し，そこから生徒が9人を選ぶことにした(資料1)。9人の選手はより野球に近づけるために，内野手4人，外野手3人，捕手1人，自由に1人選ぶこととした(写真1)。そして1人の選手につき出塁率と出塁の仕方を表すスピナーの2通りの用紙を印刷する。このときExcelを用いて，データの数値を円グラフに表し，印刷した。そしてコンパスカッターを用いて円グラフを切り取り，台紙に張ってスピナーを作った(写真2)。

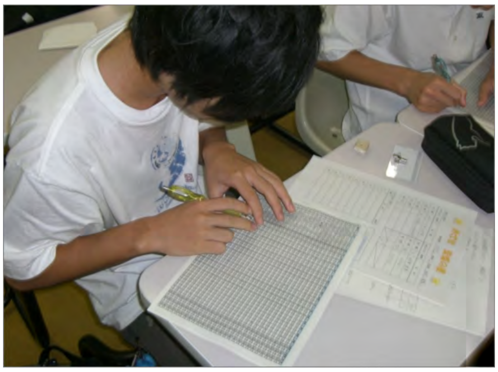

写真1

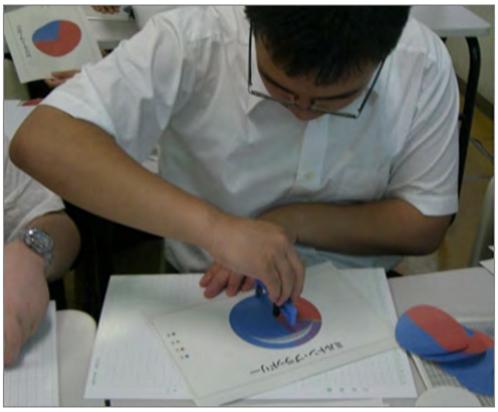

写真2

そして，2.3節で示した2つのモデルを紹介し，最後に生徒がモデルを考える時間をとった。

3.3 生徒の活動の様子

3.2節で示したテキストの第3章「野球と確率」において，A→B→A→B→A→…という打順で打席に入るとき，得点が0点〜5点となる確率を求めた。それをもとに，得点がn点となる確率を求める問題を出した。ほとんどの生徒が得点が奇数と偶数のときで法則性が変わることに気づき，得点が奇数のときと偶数のときに場合分けして考えることができていた。そして，期待値を考えると計算が無限に続いていくことに気づき，無限級数を考えることの必要性を感じていた。

また，部分和を求め，その極限を考えるとき，$\lim_{m\to\infty} m(ab)^m$という不定形の極限を考えなければならない。この極限は高校数学の範囲では二項定理を用いることで考えることができるが，今回の実践では二項定理を習っていない高校1年生も参加していたため，テキストの第6章において，下の例のように，具体的な$\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{2})^n$という極限について考えることで，$\lim_{m\to\infty} m(ab)^m = 0$となることを導くような構成とした。

例.

$a_n = n(\frac{1}{2})^n$とする。

$\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{2})^n$について考える。

$n = 1$のとき，$a_1 =$

$n = 2$のとき，$a_2 =$

$n = 3$のとき，$a_3 =$

$n = 10$のとき，$a_{10} =$

nをどんどん大きくすると，a_nは____________

よって，$\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{2})^n =$

$\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{2})^n = 0$となることを理解した生徒たちは，$\lim_{m\to\infty} m(ab)^m$という不定形の極限も0に収束するであろうと予想していた。

2日目のシミュレーションゲームでは，実

際の2008年のメジャーリーグと日本プロ野球選手のデータを用いたため，自分たちの知っている選手や好きな選手を選んだり，その選手の特徴や様々なデータを知ったりして，とても興味を持って選手選びをしていた。3.2節で示したように生徒たちはすばやくスピナーを作り，打順を考えてプリントに書き込み，ゲームをしていた（資料2）。初めは自分一人でゲームをし，最高の打順を考え，次に仲間と実際に戦いながら考えていた（写真3）（写真4）。

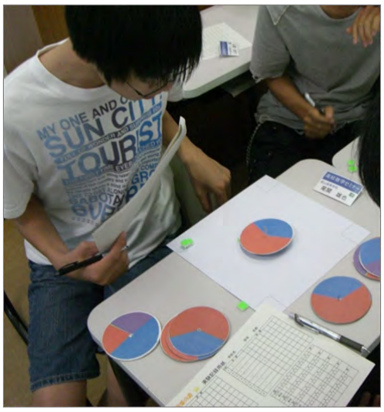

写真3

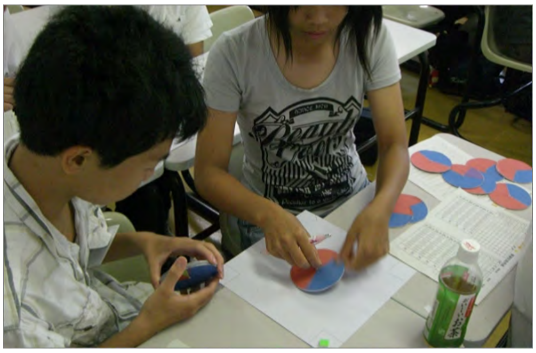

写真4

自分一人で考えるよりも，やはり仲間と実際にゲームをしながら考えを進めているときのほうが生徒たちは楽しそうで，得点が入って歓声が上がったり，チャンスでアウトになってしまってため息が聞こえたりと，とても充実しているようであった。

シミュレーションゲームをする中で，生徒たちは次のようなことに気づいていた。

・長打を打つ確率が高い人が出塁率の高い人の後だと，塁にランナーがいる状態で2塁打やホームランが出るので得点が入りやすい。

・出塁率が高くても，長打が打てない選手は意外と使えない。

4．アンケート結果と考察

(1) 授業のねらい (A) について

「1日目の野球の出塁率の理論は理解できましたか？」の質問に対して約91％の生徒が理解できたと回答し，残りの生徒はあまり理解できなかったと回答していた。よってこのねらいはほぼ達成できたと考える。

(2) 授業のねらい (B) について

「シミュレーションゲームにおいて，自分の最高の打順を見つけることができましたか？」という問いに対し，できたと回答した生徒は全体の50％であった。できなかったと回答した生徒においても，「どうすれば最高の打順になると思いますか？」という問いに対し，多くの生徒が「もっとたくさん実験する。」や，「長打率も考慮しなければならない。」など，改良点を自分で分析することができていた。よってこのねらいもほぼ達成できたと考える。

(3) 授業のねらい (C) について

「他にどのような野球のモデルが考えられますか？」という問いに対し，全生徒がモデルを考えることができていた。その中には，より野球に近いモデルでシミュレーションを通して考えるものがあったり，得点の期待値を実際に計算して求めるようなモデルがあったりと，様々であった。生徒が作成したモデルをいくつか紹介する。

・アウトかホームランのみのモデルで得点の期待値を求める。

・「人数3人，ベース4つ，1イニング，出塁は1塁打〜ホームランまですべてある」というモデルにおいて，得点の期待値を求める。

・「①〜⑤の選手5人，ベース3つ，出塁は1

塁打と２塁打があり，出塁率は①＞②＞③＞④＞⑤」というモデルにおいて，得点の期待値を求める。
・シミュレーションにエラー，代走，代打，盗塁を取り入れる。
・投手のストライクとボールのスピナーを作る。
・ピッチャーのスピナーを作り，その結果に応じたバッターのスピナー（ピッチャーの投げる球によって打率や出塁の仕方を変える）を用意し，シミュレーションゲームを行う。

また,「シミュレーションゲームをすることの良さはなんだと思いますか？」という問いに対し,「計算で出したことを実際にやって確かめられる。」,「数学で計算する前にだいたいの予想をたてることができる。」,「理論が正しいかどうか見直すきっかけになる。」などの意見があり，理論やシミュレーションで分析する過程を理解できていた。

一方でどうしてもゲームの楽しさに着目してしまい，シミュレーションの良さを味わうことができなかった生徒も見られた。よってさらにシミュレーションの良さを実感できるように工夫をしていかなければならない。

5．今後の課題

ここで使用したテキストでは，高校３年生以外が初めて見る極限を扱っているため，学年によって進度や理解に差ができてしまい，最後まで証明ができなかった生徒もいた。よって，より学年に合わせたテキスト作りをしなければならないと感じた。また極限の考え方を使うことで長かった式が簡単になり，すっきりした式になったことに驚いたという生徒の意見があった。このような経験を多くの生徒ができるような授業展開にしたい。

２日目においては，打順を入れ替えてどんどんシミュレーションしていくだけでなく，どうしてこの打順では得点が入りづらかったのか，またどうしてこの打順なら得点が多く入ったのか，しっかりと考え，振り返ることができるような働きがけが必要であったと考える。

参考文献

[1]J. アルバート・J. ベネット，2004，メジャーリーグの数理科学上，下，シュプリンガー・フェアラーク.

[2] 竹内啓・藤野和建，1988，スポーツの数理科学ーもっと楽しむための数字の読み方ー，共立出版.

[3]Ladany,S.P.and Machol,R.E.(ads),1977,Optimal Strategies in Sports,North-Holland Publishing Co.,Amsterdam.