

## ICTを活用した正多面体に係る教材開発とその実践

加藤純一<sup>1</sup>, 石渡哲哉<sup>2</sup>

本論文は、正多面体を素材とした高校生対象の授業実践に関する報告を行うものである。実践内容は、パソコンや塩、粘土といった道具を用いた正多面体の切断面の分類である。ここでは、授業実践における生徒の様子を中心に ICT<sup>3</sup>活用例や教材内容、実践結果について述べる。

<キーワード> 正多面体, ICT, パソコン, 切断面

### 1. はじめに

高度情報通信ネットワーク社会が進展していく中で、子どもたちがコンピュータやインターネットを活用し、情報社会に主体的に対応できる「情報活用能力」を育成することは非常に重要なことであると言われている。

こうした情報活用能力の一層の充実を図るために、新学習指導要領では各教科等の指導における教員による ICT 活用及び児童生徒による ICT 活用のいずれについても充実が求められており、効果的・効率的な教育を行うことにより確かな学力を確立するとともに、教育の情報化が重要であると提言している。

特に、文部科学省の新「情報教育に関する手引き」では子どもたちの情報活用能力を育成する学習活動について、次の学習活動が位置付けられている。

図形の性質をコンピュータ等を使って見出す学習活動（例えばシミュレーション機能の活用）

我々はこの学習活動に着目し「学習内容をより分かりやすくする」「児童の興味や関心を高める」「使いやすい」コンテンツを作成したいと考えた。特に3次元空間を扱うシミュレーション教材の数が少ないことから、その

分野を焦点とした開発を行い教育実践を行うこととした。

本論文は、2008年12月13日、14日に岐阜県図書館で開講された高校数学セミナーの2日間の実践をまとめたものである。高校生の編成は、1年生12名、2年生9名の全21名であった。

### 2. 教材設定の理由

学習指導要領の変遷に伴い、「立体の切断」及び「投影図」の指導が削除され、児童・生徒の空間概念の把握能力が低下してきているように思われる。そのため今回の実践では、空間図形の観察、操作や実験を通して空間図形に対する直観的な見方や考え方を深めたいと考えた。具体的には、念頭操作で立体図形を動かしたり切断したりできる力を身につけることを目標としている。

### 3. 教材開発

直観的な見方や考え方を深めるためには、黒板に描かれた図による説明を受けるだけでなく、教具を手で操作して、数学的な関係や性質を導く体験をする必要がある。そのような具体的操作を通して、学習内容はイメージ

<sup>1</sup>岐阜県庁環境生活部 (2009年3月31日まで岐阜大学大学院教育学研究科所属)

<sup>2</sup>芝浦工業大学システム理工学部 (2009年3月31日まで岐阜大学教育学部所属)

<sup>3</sup>ICT: Information and Communication Technology(情報コミュニケーション技術)の略

化され、具体操作によらない抽象性の高い学習へと発展していく。しかし、準備や児童・生徒への説明に時間がかかることなどからこのような教育方法はあまり行われていないようである。また、空間図形の教育において模型を使った切断なども、自由な試行が困難なためほとんど行われていないのが現状である。

そこでコンピュータの利用を考えたい。コンピュータグラフィックスならば、具体操作のシミュレーションを用いて、生徒の試行錯誤による試行を補助する役割を持たせることが可能である。さらに、様々な図形に対して何度でもシミュレーションを行えるという特徴がある。

以上のことから、我々は図1のようなシミュレーションツールを開発した。



図1. シミュレーションツールと操作の様子

本ツールはすべての正多面体を扱うことができ、立体図形及び切断面の平行移動、回転移動、ワイヤースケーム<sup>4</sup>による表示及びアニメーションによる表示等多彩な機能を備えるとともに、それらすべての機能がマウスのみで簡易かつ直感的に操作できるよう設計している。本ツール作成に係るアルゴリズム及びその実装方法については本稿においては省略する(加藤[1]参照)。

#### 4. 実践における教材の扱い

授業のねらいは、正多面体の切断面について分類する活動を通して、空間図形に対する直観的な見方や考え方を深めることである。

授業では、木製の正多面体、アクリル板の正多面体、塩、切断くん<sup>5</sup>、展開図が作れるポ

リプロピレンの色板、粘土及び切断用のテグス等を用意した。これらの教材を用いることで感覚的・視覚的に正多面体の性質を捉えることができる。

例えば、色板を型として粘土を詰めてできた正多面体を切断する作業を通して、念頭操作だけで切断面を把握できるようになる効果を期待している。アクリルの正多面体は、塩の出し入れや回転操作により切断面の変化の様子を観察できるよう工夫した(図2参照)。



図2. アクリル板の正多面体と実際の操作の様子

切断くんについては、塩の操作では見えにくい連続的な変化をアニメーションにより可視化したり、微妙な調整を平易に行うことが可能としており、より自由な試行を行うことができる。

### 5. 実践の概要と生徒の様子

#### 5.1 多面体の導入

2日間を通して扱ったのは次の問題である。

正多面体の切断面は何種類あるか分類せよ。

導入として、切断面という用語を定義<sup>6</sup>し、立方体をいくつか切断して見せた後、立方体の各面に穴をあけた立体図形(図3左参照)の切断面を考えさせた。



図3. 穴あき立方体とその切断面

立方体に対して3カ所の頂点を通る、切断面に正六角形ができるという条件に合うように切断することで、それぞれ図3中・右のような切断面が現れる。

<sup>4</sup>3次元オブジェクトを線で表現する手法のこと

<sup>5</sup>本研究で開発した3次元動的幾何ツールの名称。図1参照。

<sup>6</sup>切断面の定義：立体図形を平面で切断した時に現れる図形を切断面と呼ぶ。

切断によりまったく予期せぬ形が現れることを知り、多くの生徒が立体図形の切断に興味を持ってくれたようである。このような切断面をもっと動的に可視化できるように、次のような教材も用意した(図4参照)。



図4. アクリル製の穴あき立方体

これは塩の量や角度を調節することで切断面を可視化できるようにしたものである<sup>7</sup>。

さて、ここで多面体を次のように定義した。

複数(4以上)の平面に囲まれた立体図形を多面体と呼ぶ。

次に、正多面体の定義を予想させると、多くの生徒が同一の正多角形で構成されている多面体であると回答した。しかしこの定義では図5のような本来は正多面体とは呼ばない立体図形も正多面体の定義を満たすこととなり、例外が発生してしまう。



図5. 正多面体ではない例

そこで、次のように正多面体を定義した。

すべての面が同一の正多角形で構成されており、かつ全ての頂点において接する面の数が等しい多面体を正多面体と呼ぶ。

ここで、木製の多面体セット(図6参照)を与え、実際に触らせながら目の前の多面体が正多面体の定義を満たしていることを確認させた。



図6. 木製の多面体セットと観察の様子

<sup>7</sup>作成するには塩ビ板かアクリルを用いるのが良い。

<sup>8</sup>参考資料参照。

以上をふまえ次のような質問をした。

「これら5つの立体図形が正多面体であることは認めましょう。では他に正多面体は存在するでしょうか。」

この問いに対して、「5つしかない。」「無限種類存在する。」という意見が多く出された。それを受けて次の課題を与えた。

正多面体が何種類存在するか考えよう。

この課題に取り組むにあたり、まずは既知の正多面体の性質を調べるために、ワークシート<sup>8</sup>を配布し、木製の正多面体を見ながら表を埋めさせた。

多くの生徒が正12,20面体の辺の数や頂点の数を数えるのに苦労してながらも、友達と一緒に工夫して数える姿が多く見られた。

### 5.2 多面体の種類と証明

正多面体が5種類しかないことの証明としては、次の2つが良く知られている。

- 角度を用いる方法
- オイラーの多面体公式を用いる方法

今回のセミナーでは、多面体に対する性質について理解を深め、その性質が成り立つ理由を論理的に考察させるために両方の証明を扱うこととした。

以下に高校生向けに行った証明を示す。

<証明> (角度)

正多面体は次の性質を満たす(図7参照)。

- 1つの頂点に集まる面の個数は3つ以上。
- 一つの頂点に集まる面の内角の和は $360^\circ$ 未満。

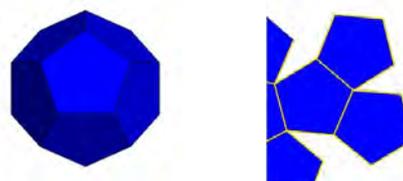


図7. 正多面体の性質

正 $n(>3)$ 角形の一つの内角の大きさは

$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} \quad (1)$$

であり、これを  $r(> 3)$  枚集めて  $360^\circ$  未満であるから

$$r \cdot \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} < 360^\circ \quad (2)$$

となる。よって

$$r(n-2) < 2n \quad (3)$$

$$rn - 2r - 2n < 0 \quad (4)$$

$$r(n-2) - 2n < 0 \quad (5)$$

$$r(n-2) - 2(n-2) - 4 < 0 \quad (6)$$

$$r(n-2) - 2(n-2) < 4 \quad (7)$$

$$(r-2)(n-2) < 4 \quad (8)$$

と式変形することができる。 $n \geq 3, r \geq 3$  の自然数でこの不等式を満たすのは

$$(n, r) = (3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5) \quad (9)$$

であり、これらが正 4, 6, 8, 12, 20 面体に対応し、これですべてである。

[証明終]

セミナーでは、式 (4) までを我々が説明した後、この条件を満たす  $r$  と  $n$  の値の組を考えさせた。

この問題は 2 変数を持つ不等式であるため生徒に対する負荷が大ききように思われたが、班の仲間と協力することでほとんどの生徒が解答までたどり着くことができた。

<証明> (オイラーの多面体公式)

穴のあいていない多面体の頂点の数を  $V$ 、辺の数を  $E$ 、面の数を  $F$  とおけば次の関係(オイラーの多面体公式)が成立する。

$$V - E + F = 2 \quad (10)$$

正多面体において、一つの頂点に集まる面の数と辺の数は等しいので、一つの頂点に集

まる辺の数を先ほどの証明と同じ  $r$  として良い。

このとき  $r$  と  $V$  の積は、各辺両端の頂点を 2 度数えた  $2E$  に一致し、 $n$  と  $F$  の積は各辺両側の面を 2 度数えた  $2E$  に一致するので次の 2 つの関係が成り立つ(図 8 参照)。

$$rV = 2E$$

$$nF = 2E$$



図 8. 正多面体の性質

これを式 (10) に代入すると

$$\frac{2E}{r} - E + \frac{2E}{n} = 1 \quad (11)$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2E} > \frac{1}{2} \quad (12)$$

$$(r-2)(n-2) < 4 \quad (13)$$

を得ることができ、式 (8) と一致する。

[証明終]

セミナーでは式 (12) までを我々が説明し、不等式を満たす  $r$  と  $n$  の値の組を考えさせた。角度を用いる方法と同様に真偽判定法で解こうとする姿が見えたが、多くの生徒が式変形を行うことで式 (8) と等しくなることに気づき証明することができていた。

なお、オイラーの多面体公式の証明については逆帰納法で簡単に説明するにとどめることとした。

### 5.3 多面体の切断と分類

正多面体が 5 種類しか存在しないことを示した後、正多面体の切断面を分類する作業をさせた。

粘土で作った正多面体を実際に切断することで、何角形の切断面が現れるか考えさせるため、次のような方法を提示した。

まず 1 辺が 4cm の正三角形・正方形・正五角形のポリプロピレンの色板を使って、展開

図を作成し、その展開図に粘土を詰める。粘土を詰める際には、辺と頂点にこだわって作るのが重要である。

作成した粘土の正多面体はテグスを割り箸に結びつけた切断具で切断する(図9参照)。



図9. 粘土による多面体の作成とその切断例

また、面の数が増えると切断面の種類が増え複雑になるので、視覚的に切断面の予想できるよう、次の2つの道具を使用する。

1つはアクリル板で作成した面が透明な正多面体に塩を入れることで、切断面を可視化できる道具、もう1つは私が開発した切断くんを用いる。マウス1つで切断面を移動・回転させたり、視点を動かしたりすることが可能である。



図10. 切断面の観察の様子

複数の道具を用意したことで、多くの生徒が興味関心を持って意欲的に課題に取り組めたようである。

#### 5.4 生徒の考察と感想

生徒の活動中に出てきた考察には、例えば次のようなものがあった。

- ・一つの頂点に集まる辺の数が切断面の辺の数の最小値を表している。
- ・正多面体を持つ面の数よりも多い辺の数を持つ切断面は存在しない。

班ごとにある程度結果が出たところで、考察結果をまとめるためポスターセッション用のポスター作成をさせた。多くの生徒が、多面体作成・切断に熱中してしまい、ポスターを作成する時間が足りなかったという意見が

多かったが、班の仲間と協力することで、それぞれ特徴ある作品ができあがった。

ポスターセッションは、班を2つに分け、前半組みと後半組みで、それぞれ説明する側と質問する側に分けて行った。はじめはどうしたらよいかわからなくて戸惑う姿も見えたが、大学生が例を見せながら行ったことで、後半には非常に活発な討論が行われた。

中にはポスターセッションで得られた新しい知識を付け加えてよりよいものを作成しようとする姿も見られた(図11参照)。



図11. ポスターセッションの様子

## 6. 考察と展望

今回の授業では、具体物を使った活動を多く取り入れたことで、意欲的に課題に取り組もうとする姿が多く見られた。さらに、ICTを活用したことで、何度もシミュレーションで実験し、具体的操作をする姿も多く見られ、自由な試行を補助する役割を持たせることができたと考えている。

今後は、例えば球の切断面が常に円になることを確かめる学習など、自由な試行が困難と思われるものに対して、試行を補助できるツールの開発を進めるとともに、ツールの工夫・改善を続けていく予定である。

### 参考文献

[1] 加藤純一, 2009, 数学教育へ向けた情報理論の研究, 岐阜大学大学院教育学研究科 修士論文.  
 [2] 文部科学省, 2009, 小学校学習指導要領.  
 [3] 文部科学省, 2009, 中学校学習指導要領.  
 [4] 文部科学省, 2009, 高等学校学習指導要領.  
 [5] 文部科学省, 2002, 新「情報教育に関する手引き」.

## 資料. 授業展開

## 1 コマ目

## 主な学習活動

## ○受付

受付時にレポート用紙とシャープペンを渡す。

↓

## ○石渡先生の挨拶

↓

※以後プレゼンを使いながら授業を進める。

## ○挨拶後班作りを行う。

- ・(人数次第だが) 4人ずつ班を作る。(5番号で)
- ・班で自己紹介
- ・班ごとに箱を1つ持っていく。

↓

## ○2日間の予定を伝える。

- ・1日目と2日目の午前中は正多面体の切断について考える。
- ・2日目の午後はルービックキューブについて考える。
- ・注意事項をいくつか伝える。
  - ・絶対に汚さない!
  - ・物を大切に! (PCとかデジカメとか)

## ○導入

・切断面について説明する。



を 点線のように切ると こうなる。



このように切ると こうなる。

## 定義

立体図形を切断した時に現れる図形を切断面と呼ぶ。

↓

・立方体の各面の中心を正方形でくり抜いた図形を斜めに切断するとどのような図形が現れるか?



こんな図形が現れる。

このように立体の切断は面白い!でもどこをどう切ったらどんな切断面が現れるか考えるのは難しい。(今回の例では穴があいている。)

↓そこで

今回は正多面体の切断面について考えていくよ。

↓

## ○2日間かけて考える問題を伝える。

## 問題

正多面体の切断面は何種類あるか分類せよ。

## ※補足

・これはそれぞれの正多面体を切断した時に3角形, 4角形などの形ができるかという意味であって,

平行とか等長といった関係まで問うているわけではない。

・興味のある人は↑まで踏み込んで考えても良い。

○多面体と正多面体の定義を確認する。

多面体の定義

複数(4つ以上)の面に囲まれた立体を多面体と呼ぶ。

3つでは立体が構成できないことを軽く確認。

正多面体の定義

すべての面が同一の正多角形で構成されており、かつすべての頂点において接する面の数が等しい多面体を正多面体と呼ぶ。

多面体セットを箱からだし、これら全ての多面体は正多面体であることを確かめさせる。

○下線部がないと反例が作れることを示す。

○これら正多面体の名前を紹介する。

◎これら5つの正多面体が存在することは認めよう。では他に正多面体は存在しないのだろうか？

○4年生は紙を配る。

○まずは正多面体について調べ、結果を表にまとめる。

正多面体の調査表

	面数	辺数	頂点数	面数	11面体	12面体	13面体
正四面体							
正六面体							
正八面体							
正十二面体							
正二十面体							

◎正多面体は5種類しか存在しないことを証明する。

・かたい proof・・・角度と不定方程式 (1コマ目)

・やわらかい proof オイラー数と不定方程式 (2コマ目)

○まず堅い proof で証明する。

別紙参照！

証明が終わったら休憩！

2コマ目の学習

主な学習活動

○やわらかい proof で証明する。

別紙参照！

## 3 コマ目の学習

## 主な学習活動

- 箱の中身を出す。
  - 4年生は、粘土版、B紙、デジカメ、PCを配る。
  - 立方体を切ると何角形が出るか考えさせ、頭の中だけで考えるのは難しいことを確認する。
  - 午後はパソコンや、アクリル板、粘土を使って、正多面体の切断面を分類していくことを伝える。
  - 今日は最低でも正6面体の分類を終わらせる。
  - 一通の流れを説明し、制作開始
    - ・展開図作成
    - ・粘土で多面体作成
    - ・実際に切ってみる
    - ・塩とアクリルを使う
    - ・パソコンを使ってみよう
    - ・切断
    - ・デジカメで記録
    - ・印刷してB紙にまとめる
    - ・最後にはポスターセッションをやる
- 適当な時間になったら休憩

## 4 コマ目の学習

## 主な学習活動

- 続き、できるところまで頑張る。
  - 数学オリンピックの問題を配り、興味のある人はやってくるように伝える。
- 片づけて1日目終わり

## 5, 6 コマ目 (2日目)

## 主な学習活動

- 昨日の続き
- 分類・まとめをする。(2h)
- ポスターセッション形式で発表する。前後半20分くらい
- まとめをする。