岐阜数学教育研究
2009, Vol.8, 1-15

# 三角形の合同条件を題材とする授業の提案と実践

淺井洋佑[1], 愛木豊彦[2]

新学習指導要領の改訂の基本方針などから, 今後, 生徒の数学的な思考力・表現力を育成することが, これまで以上に必要とされることが予想できる。そこで, 証明を通して, 数学的な思考力・表現力を育成することを目的とし, 三角形の合同条件の証明を題材とした授業の開発を行った。本論文では, 開発に至った背景や授業の内容, そして授業実践の結果について報告する。

＜キーワード＞数学的な思考力・表現力, 三角形の合同条件, 二等辺三角形の底角

## 1. 序論

平成 20 年 3 月 28 日に新学習指導要領が公示された。それに伴って平成 20 年 9 月 25 日に発行された中学校学習指導要領解説数学編 ([1]) には, 改訂の趣旨における改善の基本方針として, 「数学的な思考力・表現力は, 合理的, 論理的に考えを進めるとともに, 互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすものである。このため, 数学的な思考力・表現力を育成するための指導内容や活動を具体的に示すようにする。特に, 根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや, 言葉や数, 式, 図, 表, グラフなどの相互の関連を理解し, それらを適切に用いて問題を解決したり, 自分の考えを分かりやすく説明したり, 互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する。」とある。このように, 数学的な思考力・表現力の重要性と指導の充実の必要性が述べられていることから, 今後,「数学的な思考力・表現力の育成」がこれまで以上に求められることが予想できる。

また, これまで体験的活動を取り入れた教材の開発と実践 ([2],[3]) を行ってきた中で, 事象を数理的に考察・表現する際に苦しんでいる生徒の姿を見ることが何度かあった。このような姿から, 生徒の数学的な思考力・表現力を育てていく必要があると感じていた。

そこで, これらのことを踏まえ, 生徒の数学的な思考力・表現力の育成を目的とした授業を考えることとした。

## 2. 題材について

### 2.1. 題材選択の背景

数学的な思考力・表現力の育成を目的とした授業を考えるにあたり,[1] を参考に題材を検討した。その中で, 「既習の数学を基にして, 数や図形の性質などを見いだし, 発展させる活動は, 発展的, 創造的な活動である。その際, 数学的な見方や考え方が重要な役割を果たす。生み出される数学としては, 概念, 性質, 定理などの数学的な事実, アルゴリズムや手続きなど多様であり, 帰納や類推, 演繹などの数学的な推論もより適切さを増し洗練されていく。」と述べられているように, 既習の数学を基に, 数学的な見方や考え方をすることで性質などを見いだしていく活動が, 数学的な思考力・表現力を育成するために重要であるとされていることや, 事象を数理的に考察する過程やその成果についての認識は, 表現す

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

ることによって深められるという指摘があることなどから,「証明」を扱うこととした。

さらに,「証明」を題材として扱うにあたり,三角形の合同条件 (3 辺相等) に着目した。三角形の合同条件は学習指導要領で,「演繹的に考えて導く対象とするのではなく,三角形の決定条件を基に,直観的,実験的に認める」とあるように,実際に中学校の授業でこれを証明することはない。しかし,幾何学基礎論 ([4],[5]) を参考に三角形の合同条件が成り立てば,2 つの三角形が合同になることを証明したところ,3 つの合同条件のうち「2 辺挟角相等」をもとに他の 2 つの合同条件が導かれていることがわかった。特に,「3 辺相等」に関しては,問題の条件を整え,「2 辺挟角相等」を三角形の合同条件として認めれば,中学生でも十分に証明可能であると判断した。それに加えて,以下の 3 つの理由もあり,「三角形の合同条件 (3 辺相等) が成り立てば,2 つの三角形は合同であることの証明」を題材とすることとした。

- これまで帰納的,類推的に考えていた三角形の合同条件を証明することで,演繹的に考えることの大切さをより一層理解できる。
- 三角形の合同条件は中学校で扱う証明の論証の根拠とすることが多く,中学生にとってよく知る身近な性質であるので問題として扱いやすい。
- 演繹的な推論の進め方に興味・関心をもち,そのような能力も高まっていく時期とされる中学生に対し,「数学的な推論の必要性と意味及びその方法の理解」を養うという図形指導の重要な目標に合致している。

### 2.2. 三角形の合同条件

本授業で証明するのは次の定理である。

| 定理 A(3 辺相等の合同条件)<br>2 つの三角形において,3 組の辺がそれぞれ等しいならば 2 つの三角形は合同である。 |
|---|

[4],[5] では線分や角の加法・減法に関する性質を考察した後に,定理 A を証明している。しかし,中学生にとって線分や角に関する基本性質の証明は難しく,それらを証明することの意義も感じにくいと考えた。従って,ここでは次の基本性質と合同の定義は使ってよいものとした。

点 A,B,C と点 A′,B′,C′ がそれぞれ一直線上にあり,B が A と C の間にあり,かつ B′ が A′ と C′ の間にあるとする。このとき,

**(a)** $AB=A'B'$,$BC=B'C'$ ならば $AC=A'C'$
**(b)** $AB=A'B'$,$AC=A'C'$ ならば $BC=B'C'$
**(c)** $\angle ABC=\angle A'B'C'$

$\angle ABC$ と $\angle A'B'C'$ があり,半直線 BD が $\angle ABC$ の内部に,半直線 B′D′ が $\angle A'B'C'$ の内部にあるとする。このとき,

**(d)** $\angle ABC=\angle A'B'C'$,$\angle ABD=\angle A'B'D'$ ならば $\angle DBC=\angle D'B'C'$
**(e)** $\angle ABD=\angle A'B'D'$,$\angle DBC=\angle D'B'C'$ ならば $\angle ABC=\angle A'B'C'$

以下は,合同の定義である。

**(f)** 2 つの図形があって,一方をずらしたり,回したり,裏返したりして他方にぴったり重ね合わせることができるとき,2 つの図形は合同である。

そして,次の定理 B も前提とした。

| 定理 B(2 辺挟角相等の合同条件)<br>2 つの三角形において,2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいならば,2 つの三角形は合同である。 |
|---|

この定理はユークリッド原論 [6] では証明されているが,[4],[5] では,ほぼ公理として扱われている。従って,本授業においても定理

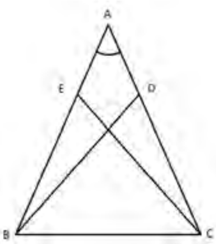
B の使用を認めることとする。

上述の (a)〜(f), そして定理 B を用いれば, 次の二等辺三角形の底角定理に以下のような証明を与えることができる。

| |
|---|
| 定理 C(二等辺三角形の底角定理)<br>△ABC において,AB=AC ならば ∠B=∠C |

(証明)

辺 AB,AC 上に AD=AE となるような点 D,E をとる。




△ABD と △ACE において,
仮定より AD=AE⋯①
AB=AC⋯②
共通な角なので
∠BAD=∠CAE⋯③
①〜③より 2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので △ABD≡△ACE である。よって

$$\mathrm{BD}=\mathrm{CE}\cdots④, \angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{AEC}\cdots⑤$$

△BCE と △CBD において,
∠BEC=180 °−∠AEC,∠CDB=180 °−∠ADB なので⑤より,

$$\angle\mathrm{BEC}=\angle\mathrm{CDB}\cdots⑥$$

BE=AB−AE,CD=AC−AD なので①,②より,

$$\mathrm{BE}=\mathrm{CD}\cdots⑦$$

④,⑥,⑦より, 2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので △BCE≡△CBD である。よって ∠EBC=∠DCB となる。[終]

この定理に関して,[4],[5] では二等辺三角形を裏返して証明している。また,[6] では平角がいつでも等しいこと (c) が使えないため, 図 1 のような補助線をひいて証明している。

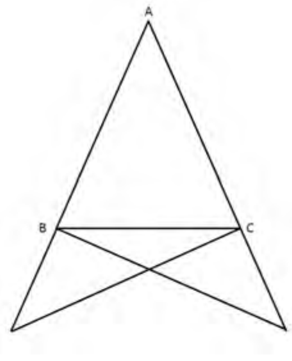



図 1

次に, 三角形の合同条件 (3 辺相等) が成り立てば,2 つの三角形は合同であることの証明について述べる。この証明は, 二等辺三角形の底角定理を使って以下のように証明することができる。

(証明)

△ ABC と △DCE において, AB=DE, BC=EF, CA=FD ならば △ ABC ≡ △ DEF となることを示す。

三角形が鋭角三角形 (図 2) の場合

線分 AB と DE を重ねて四角形 ACBF をつくる。このとき △ABC≡△ABF であることを示せばよい。

CF を結ぶ。仮定から,

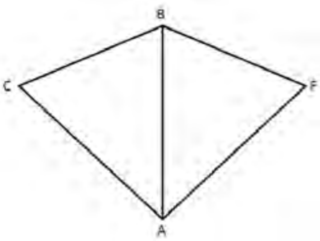



図 2

$$\mathrm{AC}=\mathrm{AF}\cdots① \quad \mathrm{BC}=\mathrm{BF}\cdots②$$

ゆえに △ACF と △BCF は二等辺三角形である。よって底角が等しいので,

$$\angle\mathrm{ACF}=\angle\mathrm{AFC}, \angle\mathrm{BCF}=\angle\mathrm{BFC}$$

すると, $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{ACF}+\angle\mathrm{BCF}$

$\angle\mathrm{AFB}=\angle\mathrm{AFC}+\angle\mathrm{BFC}$

よって, $\angle\mathrm{ACB}=\angle\mathrm{AFB}\cdots③$

①〜③より,△ABC と △ABF において,2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので, △ABC≡△ABF となる。

三角形が鈍角三角形 (図 3) の場合

線分 AB と DE を重ねて四角形 ACBF をつくる。このとき △ABC≡△ABF であることを示せばよい。

CF を結ぶ。仮定から,

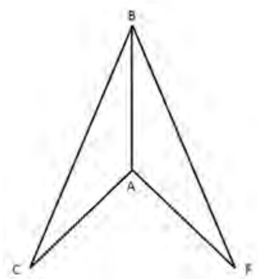



図 3

$$\mathrm{AC}=\mathrm{AF}\cdots① \quad \mathrm{BC}=\mathrm{BF}\cdots②$$

ゆえに △ACF と △BCF は二等辺三角形である。よって底角が等しいので,

$$\angle\mathrm{ACF} = \angle\mathrm{AFC}, \angle\mathrm{BCF} = \angle\mathrm{BFC}$$

すると, $\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{BCF} - \angle\mathrm{ACF}$

$\angle\mathrm{AFB} = \angle\mathrm{BFC} - \angle\mathrm{AFC}$

よって, $\angle\mathrm{ACB} = \angle\mathrm{AFB}$…③

①〜③より,△ABC と △ABF において,2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので, △ABC≡△ABF となる。[終]

### 2.3. 授業への展望

授業では定理 C を証明した後, 定理 A を証明する。

定理 C は中学校第 2 学年で学ぶ内容であり, 教科書 [7] では, 二等辺三角形の頂角の二等分線を作図することで証明を与えている。しかし, この作図が正しい根拠として三角形の合同条件 (3 辺相等) が用いられているため, 今回この方法は使えない。これらを踏まえ, この証明を扱うことで以下のような効果が期待できると考えた。

- 角の二等分線の作図が三角形の合同条件 (3 辺相等) を根拠としていることを確認できる。
- この内容を既習している生徒にとっても新たな問題として取り組める。
- 頂角の二等分線を作図しないでこの性質を証明することにより, 一つの事柄を証明するにも様々な方法があることを知る。

定理 A の証明で最も難しいのは, 図 2 のように 2 つの三角形から四角形を作ることだと考えた。そこで, これが生徒自身のアイデアとなるよう紙で作った合同な三角形を 2 枚配布することとした。

また, 図 3 の場合を考える際, 三角形の最も長い辺どうしを重ねて四角形を作れば, 図 2 の場合に帰着できると考える生徒がいるかもしれない。しかし, このように考えるには, 最も長い辺をはさむ角がともに鋭角になることを証明しなくてはならない。このことも机間指導の際, 必要に応じて説明することとする。

## 3. 授業の概要

### 3.1. 授業の流れ

授業は全 2 時間, 第 1 時で二等辺三角形の底角定理, 第 2 時で三角形の合同条件 (3 辺相等) を扱うこととした。ここでは授業の大まかな流れを述べる。なお, 詳細は, 指導案 (文末資料 1) に示している。

＜第 1 時＞

1. 2 時間かけて「三角形の合同条件 (3 辺相等) が成り立てば 2 つの三角形は合同であること」を証明することを知る。なお, 他の 2 つの合同条件の証明は補助プリント (文末資料 2,3) を配布することで補う。
2. 本時では, 二等辺三角形の底角定理を証明することを知る。
3. 頂角の二等分線は, 三角形の合同条件 (3 辺相等) を根拠としているためひけないことを理解する。
4. 三角形の合同条件 (2 辺挟角相等) と直線の角度は 180 °であることだけを使って二等辺三角形の底角定理を証明することを知る。
5. 学習プリント (文末資料 4) を使って証明に取り組む。
6. 全体交流を行う。

＜第 2 時＞

1. 二等辺三角形の底角定理と三角形の合同条件 (2 辺挟角相等) だけを使って, 三角形の合同条件 (3 辺相等) が成り立てば 2 つの三角形は合同であることを証明することを思い出す。

2. 学習プリント (文末資料 5) 等を使って証明に取り組む。
3. 全体交流を行う。

### 3.2. 授業のねらい

ここまで述べたことを踏まえ, 授業のねらいを以下の 3 つとした。

$(i)$ 三角形の合同条件 (3 辺相等) が成り立てば 2 つの三角形は合同であることを証明することができる。
$(ii)$ 根拠を明らかにしながら問題に取り組むことができる。
$(iii)$ 証明を通して改めて演繹的に考えることの大切さを知る。

## 4. 実践について

### 4.1. 実践の概要

授業名：合同 mania
実施日：平成 21 年 2 月 19 日,3 月 2 日
場　所：岐阜大学教育学部附属中学校
対　象：中学 3 年生 39 名
時間数：全 2 時間

### 4.2. 活動の様子

＜第 1 時＞

証明を扱うということで, 生徒が敬遠しがちになるのではないかという予想のもと授業に入ったが, 予想に反して, 生徒はとても意欲的に問題に取り組んでいた (写真 1)。また, 活動中につまづいている生徒に対して, 自然と仲間同士で教えあう姿も見られた。

一度証明した事柄を限られた条件の中で改めて証明することに対して, 初めは戸惑っている生徒の姿も見られたが, 証明の道筋が見えたときなどに, 達成感や満足感を得ているように感じた。

写真 1

＜第 2 時＞

第 1 時で証明した二等辺三角形の底角定理と三角形の合同条件 (2 辺挟角相等) を使って証明していくことを確認した後, すぐに活動に入った。三角形の紙片を配布すると, それをもとにさっそく考えを進める生徒の姿が見られた (写真 2)。また, 四角形を作ることができる根拠を平行移動, 対称移動, 回転移動といった言葉で説明できる生徒もおり, 根拠を明確にしながら問題に取り組めていることがうかがえた。

早くできてしまった生徒には予定どおり, 鈍角三角形の場合を考えさせた。時間の都合上, 最後の結論まで証明を書ききることができた生徒は少なかったが, この問題に取り組んだ生徒のほとんどが証明の道筋を見出すことができていた。

さらに, 全体交流でも自分の考えをわかりやすく話す姿が見られた (写真 3)。

また, 前時の終わりに, 補助線をひかないで二等辺三角形の底角定理を証明する方法を知りたいという生徒がいたため, 補助プリント (文末資料 6) を配布することで対応した。

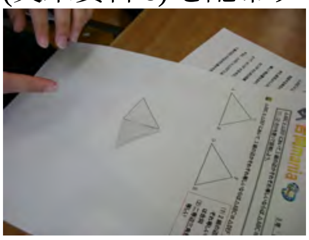


写真 2

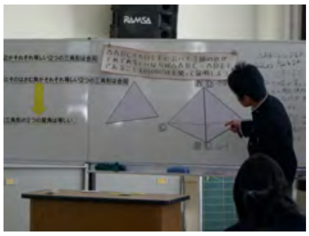


写真 3

## 5. 実践の考察

授業後, 生徒に対してアンケート (文末資料 7) を行った。本節では, その回答や授業の様子をもとに, ねらいの達成度について考察する。

### 5.1. 生徒の感想

アンケートに寄せられた生徒の感想の一部を紹介する。なお, 回収数は 38 であった。

- 自分たちの知っている知識だけで合同条件が証明できることに驚きました。

- 自分が想像しなかったところで証明を行ったり, 様々な考え方を使っていておもしろかった
- 今まで条件とか, 教科書に書いてあるからただ使っていいるだけだったけど, 条件にもこういう根拠があるから使えるんだと思った。
- 証明はとても難しかったけど, 解けたときにはすごいすっきりした気持ちになりました。
- 証明したことのなかった合同条件を証明することができて, 本当に感動しました。

### 5.2. ねらいに対する考察

(1) 授業のねらい (i) について

数学的な思考力・表現力を養うことを目的とした授業実践を行う上で, 証明ができて初めて数学的な思考力・表現力の両方を養うことにつながるという考えのもと, このねらいを設定した。そして,「3 組の辺がそれぞれ等しいとき 2 つの三角形は合同であることの証明はできましたか」という質問に対して,「できた」と回答した生徒が 32 名 (約 84 %) に上ったこと。また, 授業で使った学習プリントを見ても, 最後まで証明しきれているものが多かったことから, このねらいは達成できたと考える。

(2) 授業のねらい (ii) について

「根拠を明らかにしながら証明に取り組むことはできましたか」という質問に対して,「できた」と回答した生徒が 22 名 (約 58 %),「ややできた」と回答した生徒が 11 名 (約 29 %) であった。また, 生徒の間で教えあいができていたことや, 学習プリントの記述からも, ほとんどの生徒がその結果に至る根拠を考えながら問題に取り組むことができていたことがうかがえる。よって, このねらいは達成できたと考える。

(3) 授業のねらい (iii) について

「今回の授業で数学に対する意識は変わりましたか」という質問に対して,「変わった」「やや変わった」と回答した生徒は 31 名 (約 82 %) であった。またその理由も尋ねたところ,「何気なく使っていた合同条件を証明することができたから」「図形に対する見方が少し変わり, 証明に興味を持ったから」といった意見が寄せられた。さらに,「証明が楽しく思えた」という言葉も聞くことができた。この結果から, 生徒は演繹的に考えることの良さや, おもしろさを感じていたと判断できる。よって, このねらいは達成できたと考える。

### 5.3. 授業を終えての見解

5.2 節で述べたように, 今回設定したねらいはすべて達成できたと考える。生徒の活動の様子や学習プリントから, 数学的な思考・表現を随所に見ることができた。このことから, 本授業の目的は達成できたのではないかと考える。

また, 実践前に「証明嫌いの生徒が多いのではないか」と考えていたため, アンケートで「授業が楽しかった」と回答した生徒が半数以上いたことは意外であった。生徒が無意識に感じていた「三角形の合同条件」に関する疑問を解決したことで, 満足感や達成感を得たため, 証明が楽しかったと回答したのではないかと考えている。生徒自身が疑問を持ち, その疑問を解決するために試行錯誤し, その結果, 満足感や達成感を得られる教材ならば, 生徒たちも楽しく証明を学べるのではないかと考える。

## 6. 今後の課題

証明を教材化することは数学嫌いの生徒を生んでしまうのではないかという懸念のもと, 教材開発, 実践に取り組んだが, 生徒たちから楽しかったという意見をもらえたのは収穫である。5.3 節でも述べたように, 生徒自身が疑問を持ち, その疑問を解決するために試行錯誤できる教材を今後も考えていきたい。

また, 生徒から「紙で作った三角形があったから考えやすかった」という意見が挙がった。

このことから, 具体物を使った作業は, 子どもが考えを進めていく上で非常に有効であると感じた。そこで, 今回のような数学的な思考力・表現力を養うことを目的とした教材にさらに体験的活動を取り入れたものを考えていきたい。

**引用文献**

[1] 文部科学省, 2008, 中学校学習指導要領解説　数学編.

[2] 淺井洋佑・愛木豊彦，2006，空間図形における教材の開発と実践，岐阜数学教育研究第 5 号，p.72-79.

[3] 淺井洋佑・愛木豊彦，2007，図形領域における数学的活動を取り入れた教材の開発と実践，岐阜数学教育研究第 6 号，p.18-32.

[4]D・ヒルベルト, 中村幸四郎訳,2005, 幾何学基礎論, 筑摩書房.

[5]David Hilbert, 寺坂英考・大西正男訳・解説,1970, 幾何学の基礎　エルランゲン・プログラム, 共立出版株式会社.

[6] 中村幸四郎・寺坂英孝・伊東俊太郎・池田美恵訳・解説，1971，ユークリッド原論, 共立出版株式会社.

[7] 吉田稔ほか 17 名,2006, 大日本図書株式会社, 新版中学校数学 2.

資料 1.

本時の展開 (1/2 時)

＜本時の目標＞

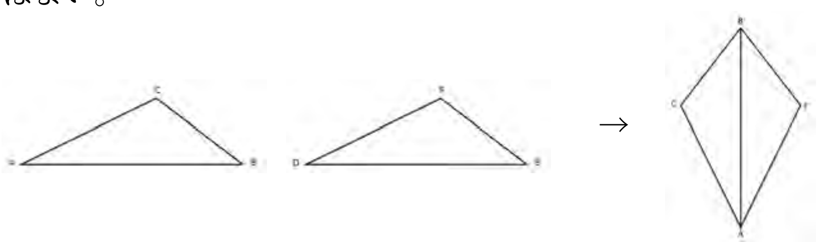
二等辺三角形の底角が等しいことを提示した条件のみを用いて証明することができる。

| 学習活動 | 教師の指導・援助 |
|---|---|
| ◎三角形の合同条件を証明していないことを思い出す。<br>◎ 2 時間の授業の流れを知る。<br>・この 2 時間で三角形の合同条件が成り立てば,2 つの三角形が合同であることを証明する。<br>・2 時間かけて, 三角形の合同条件 (3 辺相等) について証明する。<br><br>三角形の合同条件 (2 辺挟角相等)<br>↓<br>二等辺三角形の底角定理 (第 1 時に証明する)<br>→ 三角形の合同条件 (3 辺相等)(第 2 時にに証明する)<br><br>△ABC と △DEF で 3 組の辺がそれぞれ等しいならば, △ABC≡△DEF<br><br>◎二等辺三角形の底角が等しいことをどのように証明したか確認する。<br>◎今回は頂角の二等分線を引くことはできないことを理解する。<br>・角の二等分線の作図は三角形の合同条件 (3 辺相等) を根拠としている。<br>◎使うことのできることがらを確認する。<br>(1)　三角形の合同条件 (2 辺挟角相等)<br>(2)　直線のなす角は 180 °<br>◎条件を限定した上で, 改めて二等辺三角形の底角が等しいことを証明する。<br><br>二等辺三角形の底角が等しいことを (1),(2) だけを使って証明しよう。<br><br>◎証明に取り組む。<br>◎証明の結果を発表する。<br><br>2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいという三角形の合同条件を使うだけでも, 二等辺三角形の底角が等しいことを証明することができる。 | ・ユークリッド (教科書 p198), ヒルベルトについて簡単に紹介する。<br>・2 辺挟角相等, 2 角挟辺相等の証明を記載した補助プリントを配布する。<br><br>・2 時間の授業で三角形の合同条件 (3 辺相等) を証明することを述べる。<br>・三角形の合同条件 (2 辺挟角相等) は用いてよいことを説明する。<br>・2 年生の教科書を見ることを勧める (教科書 p126)。<br>・生徒に黒板で角の二等分線をかかせる。<br>・「3 辺相等」を根拠としているため使えないことを述べる。<br>・(1),(2) だけを使って証明することを強調する。<br><br>・学習プリントを配布する。<br><br>・つまずいている生徒には, 条件やわかっていることなどを確認しながら机間指導する。 |

本時の展開 (2/2 時)

＜本時の目標＞

二等辺三角形の底角が等しいことと 2 辺挟角相等の合同条件を根拠として,3 辺相等の合同条件が証明できる。

| 学習活動 | 教師の指導・援助 |
|---|---|
| ◎本時に証明することを確認する。<br>△ABC と △DEF で 3 組の辺がそれぞれ等しいならば,<br>△ABC≡△DEF | ・前時の内容と本時に取り組む内容を確認する。<br>・前時証明したことがらを利用するには, 二等辺三角形をつくる必要があることを述べる。 |
| ◎使うことのできることがらを確認する。<br>(1) 三角形の合同条件 (2 辺挟角相等)<br>(2) 二等辺三角形の 2 つの底角は等しい | |
| ◎前時証明した「二等辺三角形の底角定理」を生かす方法を考え, 証明に対する見通しをもつ。<br>△ABC と △DEF で 3 組の辺がそれぞれ等しいならば,<br>△ABC≡△DEF であることを (1),(2) だけを使って証明しよう。 | ・学習プリントを配布する。 |
| 直角三角形の合同条件を導くときに, 図形を移動して二等辺三角形を作った。 → 似たような考え方ができないか… | ・生徒全員に紙で作った三角形を配る。 |
| ◎証明問題に取り組む。<br>図形の移動と合同の定義を用いて, 線分 AB と DE を重ねて四角形 ACBF をつくる。このとき △ABC≡△ABF であることを示せばよい。<br> | ・△DEF を裏返し, 線分 AB と DE を重ねることは合同の定義と図形の移動根拠としている点を押さえる。<br>・証明ができた生徒から,「∠BAC,∠EDF が鈍角の場合」または,「∠ACB,∠DFE が鈍角の場合」の証明も考えさせる。 |
| ◎証明の結果を発表する。<br>3 組の辺がそれぞれ等しいとき,2 つの三角形は合同になるということを証明することができた。 | |
| ◎アンケートを記入する。 | |

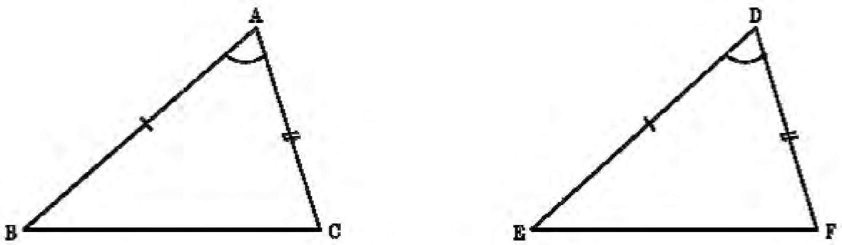
資料 2.

# 合同mania補助プリント

<「2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しい」とき,二つの三角形は合同であることの証明>

※ただし,等しい角は重なるように移動することができるとする。

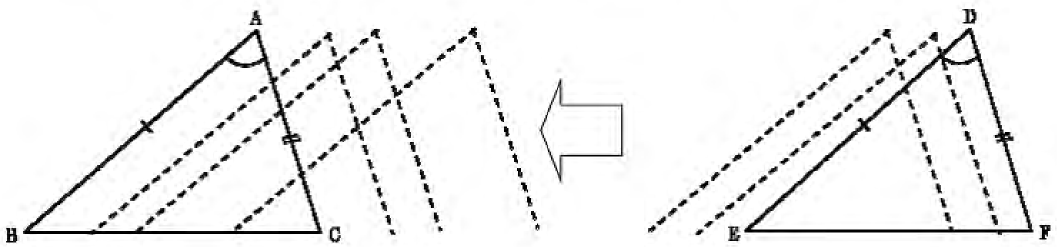
| △ABC と△DEF において AB=DE,AC=DF,∠A=∠D のとき,△ABC≡△DEF であることを証明しよう。 |
|---|




(証明)

∠D を∠A に重ねる。

つまり半直線 DE は半直線 AB に,半直線 DF は半直線 AC に重なるように移動する。




すると,AB=DE なので,AB 上の点 A に点 D が重なり,点 B に点 E が重なる。

同様にして,AC=DF なので, AC 上の点 C に点 F が重なる。

ここで,E と F を結ぶ。今,点 B と点 E,点 C と点 F が一致している。

よって,2 点を通る直線はただ一つなので BC と EF も一致する。

すなわち,△DEF を△ABC に重ねることができた。

よって,△ABC≡△DEF となる。[終]

資料 3.

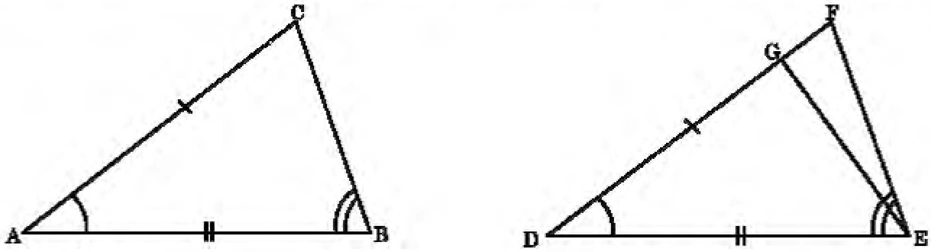

<「1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」とき,二つの三角形は合同であることの証明>

※ただし,等しい角は重なるように移動することができるとする。

～背理法についての説明～

ある命題が「正しいこと」を証明するため,その命題の「結論が正しくない」と仮定して推論を進め,矛盾が導かれることを示す方法である。つまり,その命題が成り立たないと仮定すると,すでに正しいとわかっている事実や,元の命題の仮定などに矛盾する結果が得られることから,間接的にその命題が正しいことを示す証明方法。

| △ABC と△DEF において AB=DE,∠A=∠D,∠B=∠E のとき△ABC≡△DEF であることを証明しよう。 |
|---|




（証明）

AC=DF を示し,2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいことを使って 2 つの三角形の合同を示す。

AC≠DF と仮定する（背理法）。まず,AC<DF のときを考える。

すると,DF 上に F と重ならない点 G をとって AC=DG となるようにできる。

△ABC と△DEG で AB=DE,∠A=∠D,AC=DG より,2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので

△ABC≡△DEG である。

対応する角なので∠ABC=∠DEG となる。

また,仮定より∠ABC=∠DEF なので,∠ABC=∠DEG=∠DEF となる。

等しい角は重なるので,点 F と点 G は一致する。これは点 G が F と重ならないことに矛盾する。

AC>DF のときも同様である。

よって, AC=DF が示せた。

すると, △ABC と△DEF において AB=DE,∠A=∠D, AC=DF なので,

2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しい。よって,△ABC≡△DEF である。[終]

資料 4.

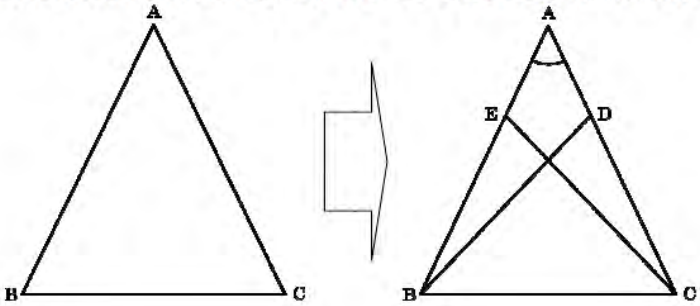
合同mania　　3 年　組 氏名

**二等辺三角形の 2 つの底角が等しいことを (1), (2) だけを使って証明しよう。**

△ABC で AB=AC ならば∠B=∠C であることを証明しなさい。

(1) 2 組の辺とそのはさむ角が
それぞれ等しい
(2) 直線の角度は 180°

この問題に対して,Y さんは辺 AB,AC 上に,AD=AE となるような
点 D,E をとり,点 B と点 D,点 C と点 E をそれぞれ結びました。
この図をもとにして, AB=AC ならば∠B=∠C であることを, (1), (2) だけを使って証明しよう。

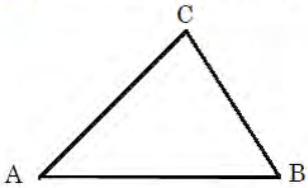


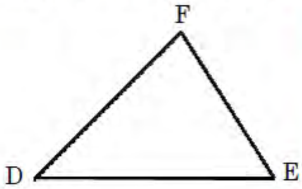
資料 5.

合同mania　　3 年　組 氏名

△ABC と△DEF において,3 組の辺がそれぞれ等しいならば,△ABC≡△DEF であることを (1),(2) だけを使って証明しよう。

△ABC と△DEF において, 3 組の辺がそれぞれ等しいならば△ABC≡△DEF であることを証明しよう。




(1) 2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいならば 2 つの三角形は合同

(2) 二等辺三角形の 2 つの底角は等しい

資料 6.

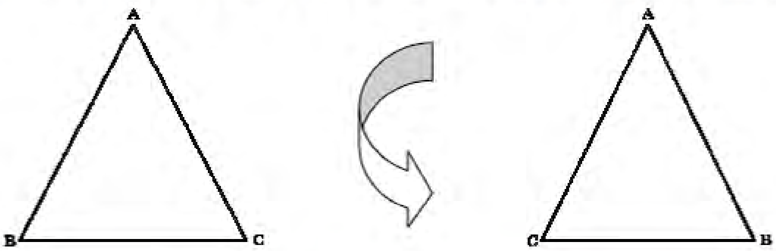
# 合同mania補助プリント3

<「二等辺三角形の 2 つの底角は等しい」ことの補助線をひかない証明>

| |
|---|
| △ABC と AB=AC のとき,∠B=∠C であることを証明しよう。 |

<証明の方針>

1. 「2 つの図形があって,一方をずらしたり,回したり,裏返したりして他方にぴったり重ね合わせることができるとき,2 つの図形は合同である。」という合同の定義をもとに,△ABC を下の図のように裏返す。
2. このとき,「2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しい」ことを用いて△ABC≡△ACB を導く。

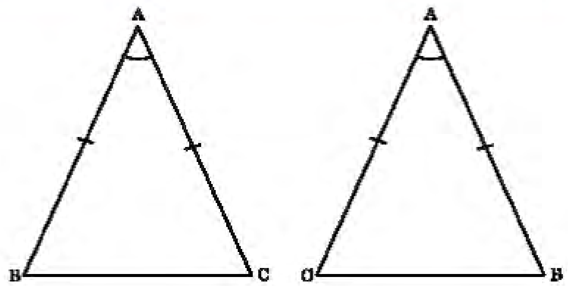



Point

裏返した図形なので合同の定義から△ABC≡△ABC は言える。しかし,対応する点の見方を変えた図形である△ABC と△ACB が合同かどうかはわからない。

(証明)

△ABC を裏返した図形を考える。




裏返した図形なので△ABC≡△ABC である。

よって∠A=∠A…①

△ABC と△ACB において,仮定より

AB=AC…②　AC=AB…③

①～③より 2 組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので△ABC≡△ACB である。

合同な三角形の対応する角なので∠B=∠C となる。[終]

資料 7.

# 合同maniaアンケート

3 年　組 氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

☆ 2 時間の授業はいかがでしたか？

楽しかった　　普通　　楽しくなかった

☆「3 組の辺がそれぞれ等しいとき 2 つの三角形は合同であること」の証明はできましたか？

できた　　できなかった

☆ 根拠を明らかにしながら,証明に取り組むことはできましたか？

できた　　ややできた　　あまりできなかった　　できなかった

☆ 今回,「三角形の合同条件」を問題として扱った理由はなんだと思いますか？

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

☆ 今回の授業で数学に対する意識は変わりましたか？

変わった　　やや変わった　　あまり変わらなかった

その理由は？

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

☆ 感想を書いてください。

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

Thank you for your answer. Have fun.