岐阜数学教育研究
2008, Vol.7, 95-108

相似比を用いて解決する身近な教材の研究と実践

鷲見浩章[1]，愛木豊彦[1]

生徒が，数学を身近なものだと感じることができれば，数学に興味関心が湧くのではないかと考えた。そこで，山の頂上から見える範囲の限界までの距離を求め，その境界線を地図にかき込むという教材を開発した。この教材によって，理想化，単純化した図形から相似な図形を見出し，相似比を使って距離を求めた後，地図にかき込むことで日常に戻すことができると考える。本論文は，その教材の内容及び，中学３年生を対象に行った授業実践の報告である。

＜キーワード＞相似，接線，地球，地図，コンパス

1．はじめに

平成 20 年 1 月の中央教育審議会答申「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領の改善について」（[1]）において，小学校算数科，中・高等学校数学科の改善の基本方針の中に,「特に，根拠を明らかにして筋道を立てて体系的に考えることや，言葉や数，式，図，表，グラフなどの相互の関連を理解し，それらを適切に用いて問題を解決したり，自分の考えを分かりやすく説明したり，互いに自分の考えを表現し伝え合ったりするなどの指導を充実させる。」（以下，方針 (※ 1) と記す）とある。また,「子どもたちが算数・数学を学ぶことの意義や有用性を実感したりできるようにすることが重要である。」とあり，そのために「学習し身に付けたものを，日常生活や他教科等の学習，より進んだ算数・数学の学習へ活用していくことを重視する」（以下，方針（※ 2）と記す）とある。

これらを踏まえ，ここで提案する授業では，生徒の身近にある金華山に関する,「金華山から海が見えるのか。」という問題（以下，問題 P と記す）を考える。金華山とは，岐阜市にある標高 328.9m の山で，頂上に岐阜城があり，岐阜を象徴するものといってもよい。授業実践を行う中学校から金華山を眺めることもできるし，おそらくほとんどの生徒が一度は登ったことがある。そのような岐阜市の中学生にとって身近な存在である金華山に関連したこの問題を解決するためには，２節で詳しく述べるが，２つの図形が相似であることの証明，相似比を利用した長さを求める計算，地図へのかき込みという３つの活動を必要とする。これらの活動により，方針（※ 1）が実現できるものと考えた。また，身近な金華山を題材としていること，計算で得た結果を地図へかき込むことによりその意味が実感できることなどは，方針（※ 2）そのものである。

次節で，問題の解決方法，関連する数学的見方や考え方，授業展開を示す。

2．教材について

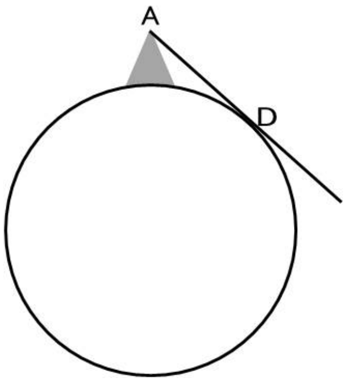
2.1. 山の頂上から見える範囲

地球は，短半径（回転軸の半分）が 6378.079km，長半径（赤道半径）が 6378.397km の回転楕円体である。しかし，この短半径と長半径の差は極めて小さいた

[1]岐阜大学教育学部

め，地球を半径約 6400km の球であるとして考えることにする。以下，空気は澄み，遮蔽物がないものとして考えていく。

まず，金華山の頂上と地球の中心を含む平面で地球を切断する（図 1）。そして，金華山の頂上（点 A）から地球に接線を引く。このときの接点（点 D）が見える範囲の限界である。



(図 1)

図 1 に補助線を引き，各点に次のように記号を与える（図 2)。

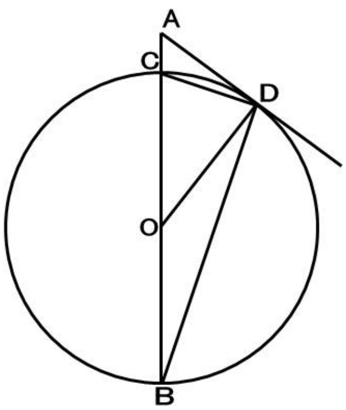
O…地球の中心

A…金華山の頂上

B…直線 AO と円 O の交点のうち、点 A と反対側の交点

C…直線 AO と円 O の交点のうち、点 A と同じ側の交点

D…点 A を通る円の接線の接点



(図 2)

図 1 の AD の長さは，三平方の定理を用いて求めることができる。図 2 において，$\angle \mathrm{ADO} = 90^\circ$ なので，三平方の定理より，

$$\mathrm{AO}^2 = \mathrm{DO}^2 + \mathrm{AD}^2 \tag{1}$$

ここで，

$$\mathrm{AO} = 6400.33,\ \mathrm{DO} = 6400$$

より，

$$\begin{aligned} \mathrm{AD} &= \sqrt{4224.1089} \qquad (2) \\ \mathrm{AD} & \qquad 65 \end{aligned}$$

よって，金華山の頂上から見える範囲の限界までの距離は約 65km である。

AD の長さは，相似比を用いても求めることができる。まず，図 2 において，△ ABD ∽△ ADC を示す。

［証明 1］

△ ABD と△ ADC において，

共通の角なので，

$$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{DAC}$$

接弦定理より，

$$\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{ADC}$$

よって，2 組の角がそれぞれ等しいので，

$$\triangle \mathrm{ABD} \backsim \triangle \mathrm{ADC}$$

（証明終）

よって，△ ABD ∽△ ADC より，

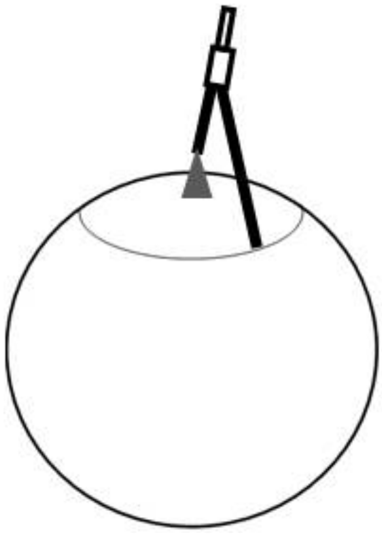
$$\begin{aligned} \mathrm{AD} : \mathrm{AC} &= \mathrm{AB} : \mathrm{AD} \\ \mathrm{AD}^2 &= \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \\ \mathrm{AD}^2 &= 4224.1089 \\ \mathrm{AD} &= \pm\sqrt{4224.1089} \end{aligned}$$

AD は正の値しか取りえないから，

$$\begin{aligned} \mathrm{AD} &= \sqrt{4224.1089} \\ \mathrm{AD} & \qquad 65 \end{aligned}$$

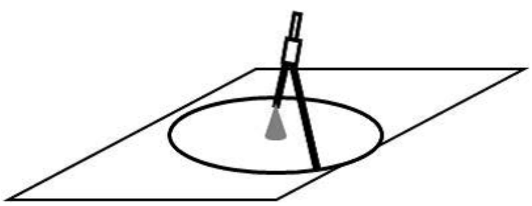
よって，金華山の頂上から見える範囲の限界までの距離は約 65km である。

金華山の頂上から見える範囲の限界までの距離は約 65km であり，これを図示すると，コンパスを用いて図 3 のようにかくことができる。



(図 3)

これを地図上に示そうとすると，金華山の位置に，地図の縮尺にあった高さをとり，コンパスを用いて図 4 のようにかくことができる。なぜなら，地球全体の地図は地球の球面を平面に表すため，どうしても距離や角度，面積に歪が生じてしまうが，地球のごく狭い範囲を地図にするときには，この歪がないものとしてとらえてもよいからである（[2] より）。



(図 4)

しかし，地図上で金華山の高さを用いずに水平線の位置を描こうとすると，中心となる点は図 2 における点 C であり，見える範囲の限界までの距離は $\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さである。よって，$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さを求める必要がある。

∠ COD ＝ θ とおく。△ AOD は ∠ ADO $= 90^\circ$ の直角三角形であるから，

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= \sqrt{1-\cos^2\theta} \\
\sin\theta &= \sqrt{1-(\frac{6400}{6400.33})^2} \\
\sin\theta & \quad 0.010154655 \\
\theta &= \arcsin 0.010154655
\end{aligned}
$$

ここで，θ は半径 1 の円（O’）で，中心角が∠ AOD である $\overset{\frown}{\mathrm{C'D'}}$ の長さを表している。よって，円 O と円 O’ は相似であるから，

$$
\mathrm{OC : O'C'} = \overset{\frown}{\mathrm{CD}} : \overset{\frown}{\mathrm{C'D'}}
$$

従って，

$$
\begin{aligned}
\overset{\frown}{\mathrm{CD}} &= 6400\theta \\
\overset{\frown}{\mathrm{CD}} & \quad 6400 \arcsin 0.010154655 \\
\overset{\frown}{\mathrm{CD}} & \quad 64.99091096 \\
\overset{\frown}{\mathrm{CD}} & \quad 65
\end{aligned}
$$

以上より，$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ の長さも約 65km である。

ここで，図 2 における弦 CD の長さも求める。弦 CD は，金華山から水平線までの直線距離である。弦 CD の中点を E とおくと，∠ COD=θ なので，

$$
\begin{aligned}
\angle\,\mathrm{EOC} &= \frac{\theta}{2} \\
\mathrm{CE} &= 6400\sin\frac{\theta}{2}
\end{aligned}
$$

である，

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \\
\sin\frac{\theta}{2} &= \frac{0.33}{12800.66}
\end{aligned}
$$

よって，弦 CD ＝ 2CE なので，

弦 CD $= 2\times 6400\sin\frac{\theta}{2}$

弦CD $= 64.993145023148402800511895891369$
弦CD $\quad 65$

また，弦CD の長さは，三平方の定理を用いても求めることができる。(2) で求めたように，

$$\mathrm{AD} = \sqrt{4224.1089}$$

△ ABD ∽△ ADC より，

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AC} = \sqrt{4224.1089} : 0.33$$

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AC} = \frac{\sqrt{4224.1089}}{0.33} : 1$$

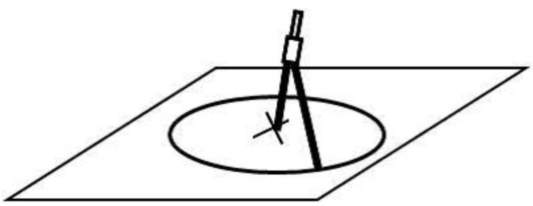
よって，

$$\begin{aligned} \mathrm{BD} : \mathrm{DC} &= \frac{\sqrt{4224.1089}}{0.33} : 1 \\ \mathrm{BD} &= \frac{\sqrt{4224.1089}}{0.33} \times DC \end{aligned}$$

これを $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CD}^2 + \mathrm{BD}^2$ に代入すると，

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{CD}^2 + (\frac{\sqrt{4224.1089}}{0.33} \times \mathrm{DC})^2 \\ \mathrm{CD} &= 64.99063\cdots \\ \mathrm{CD} & \quad 65 \end{aligned}$$

このように，AC の長さが円 O の半径に対して極めて小さいので，AD と弦CD の長さ，弧CD の長さをほぼ同じと見ることができる。したがって，図 3 のように金華山の高さを無視して図 5 のように水平線の位置を描いてもよい。



(図 5)

2.2. 先行研究

問題 P のように山の頂上から見える範囲の問題は，学習指導要領解説（[3]）や中学校の教科書（[4]）で取り上げられている。[3] では,「日常生活や社会で数学を利用する活動」に「三平方の定理を利用して実測することが難しい距離などを求める活動」として紹介されている。

今回の授業実践では，実践の対象となる生徒が三平方の定理を未習なので，2.1 節で示したような相似な図形の性質の応用と位置づけることにした。ここで，三平方の定理の応用として問題 P をとらえると，式 (1) に代入するだけで問題が解決できる。従って，今回のように相似の応用とした方が証明も必要となるので，この扱いの方が適切であると考えた。また，[5] では，同じように相似を用いた証明が紹介されている。そこでは，さらに人間が立った場合何 km 先まで見えるのかという問題も扱っている。

2.3 教材の系統性

”地球は丸い”ということは，小学 4 年生の算数の教科書（[6]）「円と球」の単元において，まるいものの例として地球儀が挙げられているのが初出である。その後，中学の科学 2 分野（[7]）「地球と宇宙」の単元において,「地球は直径約 1 万 3000km の球形をした天体」であることを学習する。

しかし，実際の地球の形は，赤道の直径の方が回転軸よりも長い回転楕円体であるが，赤道半径と回転軸の長さの差が約 20km とわずかであるため，本授業ではこれを球とし，遮蔽物が無ければどこまで見えるのかということを考えていく。そして，図 2 のように地球の中心と金華山の頂上を含む平面で切断した断面で考えていく。小学 4 年生の時点で，球を平面で切断するとその断面は必ず円となることを学習する。そのため，地球を球とすれば，平面で切断した断面が円であることは容易に考えられる。このように現実を理想化し

（地球を球とし，遮蔽物がないとする），単純化した簡単な図形としてとらえる（地球の断面図で考える）ことのよさを感じ，考察に生かせるようにする。

図２において，地図上にあらわれる金華山からの距離は弧CDである。中学３年生の学習状況では，この長さを求めることができない。また，本実践の段階で，対象となる生徒は三平方の定理も学習していない。そのため、相似を用いてADの長さを求めることとした。現在，中学を卒業するまでに接弦定理を学習しないため,［証明１］のように証明することはできない。そこで，次に接弦定理を使わない証明を紹介する。

［証明２］

△ABDと△ADCにおいて，共通の角だから，

$$\angle BAD = \angle DAC \tag{3}$$

OBとODは円の半径であるから，

$$OB = OD$$

よって，△OBDは二等辺三角形。
二等辺三角形の底角は等しいので，

$$\angle OBD = \angle ODB \tag{4}$$

∠CDBは，半円の弧に対する円周角であるから，

$$\angle CDB = 90^\circ$$

よって，

$$\angle ODB = 90^\circ - \angle ODC$$

ゆえに，(5)より，

$$\angle OBD = 90^\circ - \angle ODC \tag{5}$$

一方，接線の性質より，

$$\angle ADO = 90^\circ$$

よって，

$$\angle ADC = 90^\circ - \angle ODC \tag{6}$$

(6)，(7)より，

$$\angle ABD = \angle ADC \tag{7}$$

(3)，(8)より，２組の角がそれぞれ等しいので，

$$\triangle ABD \backsim \triangle ADC$$

（証明終）

他にも様々な証明があり，次の［証明３］,［証明４］もその一例である。

［証明３］
△ABDと△ADCにおいて，共通な角だから，

$$\angle BAD = \angle DAC \tag{8}$$

OBとODは円の半径であるから，

$$OB = OD$$

よって，△OBDは二等辺三角形。
二等辺三角形の底角は等しいので，

$$\angle OBD = \angle ODB \tag{9}$$

∠CDBは，半円の弧に対する円周角であるから，

$$\angle CDB = 90^\circ$$
$$\angle ODB + \angle ODC = 90^\circ \tag{10}$$

(9)，(10)より，

$$\angle OBD + \angle ODC = 90^\circ \tag{11}$$

接線の性質より，

$$\angle ADO = 90^\circ$$

よって，

$$\angle ADC + \angle ODC = 90^\circ \tag{12}$$

(10), (11) より,

$$\angle ABD = \angle ADC \tag{13}$$

(8), (13) より，２組の角がそれぞれ等しいので,

$$\triangle ABD \backsim \triangle ADC$$

（証明終）

［証明４］
△ ABD と△ ADC において，共通の角だから,

$$\angle BAD = \angle DAC \tag{14}$$

OB と OD は円の半径であるから,

$$OB = OD$$

よって，△ OBD は二等辺三角形。
二等辺三角形の底角は等しいので,

$$\angle OBD = \angle ODB \tag{15}$$

∠ CDB は半円の弧に対する円周角であるから,

$$\angle CDB = 90^\circ$$

∠ ACD は△ BCD の∠ BCD の外角であるから,

$$\begin{aligned} \angle ACD &= \angle CDB + \angle CBD \\ &= 90^\circ + \angle OBD \end{aligned} \tag{16}$$

また，AD は円 O の接線であるから,

$$\angle ADO = 90^\circ$$

よって，(15) より,

$$\begin{aligned} \angle ADB &= \angle ADO + \angle ODB \\ &= 90^\circ + \angle ODB \\ &= 90^\circ + \angle OBD \end{aligned} \tag{17}$$

(16), (17) より,

$$\angle ADB = \angle ACD \tag{18}$$

(14), (18) より，２組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABD \backsim \triangle ADC$$

（証明終）

［証明２］～［証明４］は，中学で相似を学習した段階であれば考えることができるので，本実践ではこれらの方法で△ ABD ∽△ ADC を証明することとした。そして，相似比を用いて AD の長さを求めるという展開にした。

本教材には，様々な良さがある。まず，相似を用いて AD の長さを求めた後，コンパスを使って地図にかき込む。コンパスを用いることで，数学を使って日常に戻す活動を行う。そして，地図を用いて確認することで，社会科の学習ともつながる。本実践では行わないが，三平方の定理を用いても AD の長さを求めることができる。また，三平方の定理を学習した後ならば弦 CD の長さを求めることができ，逆三角関数を用いれば弧 CD の長さも求めることができる。そして，AD の長さは AC の関数であることもわかる。このように，本教材は，対象となる生徒の学習状況によって，いろいろな取り扱いができる。

2.4 授業のねらい

新学習指導要領（[3]）で述べられている，数学的活動の一つとして,「数学的な表現を用いて，根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動」がある。本論文で紹介する教材はこれに相当する。具体的には，今までに学習した定理や性質を用いて，図形が相似であることを証明する。そして，それらを根拠に日常生活から生じる問題を解決していく活動を行う。

そこで，本教材のねらいを次の３つとした。

(a) 日常生活から生じる問題の解決において，数学が有効な手段であることを感じることができる。

(b) 筋道立てて証明や説明することが，深い理解につながることを実感できる。

(c) 現実を理想化，単純化することの良さを感じ，考察に生かすことができる。

3. 授業の概要

この教材を以下の要領で実践した。

題材名 「織田信長になろう !! 」
実践日 平成 20 年 12 月 17 日（水）第 4 校時
平成 21 年 1 月 13 日（火）第 1 校時
場所 岐阜市立青山中学校
対象 中学 3 年生（1 回目 24 人，2 回目 25 人）

3.1. 授業の流れ

授業の詳しい計画は指導案（資料 1）で示している。

(1) 問題提示

「金華山の頂上から海は見えるのか」という問題を提示し，金華山の頂上からはどこまで見ることができるのか疑問を持たせる。このとき，地球が丸いために見える範囲には限界があることを確認する。

(2) 課題提示

金華山の頂上から見える限界は，金華山の頂上から地球に対して引く接線の接点であることをおさえ，地球を球とし，地球の中心と金華山の頂上の 2 点を含む平面で切った断面図に接線と補助線を描き， 図 2 のように各点に記号を与え,「△ ABD ∽△ ADC となることを証明し，相似な図形の性質を使って AD の長さを求めよう。」という課題を設定する。

(3) 個人追究

“ 2 組の角がそれぞれ等しい ”という三角形の相似条件を用いて証明することを明らかにし，∠ BAD と∠ DAC は，共通な角であるために

$$\angle BAD = \angle DAC$$

となることを全体でおさえ，あと 1 組の角が等しいことを示すところから学習プリント（資料 2）を用いて個人追究を始める。既習の定義や定理，性質（円周角の定理、二等辺三角形の性質，接線の性質，三角形の外角の性質等）を根拠に

$$\angle ABD = \angle ADC$$

または，

$$\angle ADB = \angle ACD$$

を示す。これらの角が等しいことをどのように示せばよいのか，筋道を立てることができない生徒が多いと考えられるので，証明すべきことがらを明らかにし，図の中の三角形や角を抜き出して考えるように指導する。このとき，行き詰った生徒を指導する手立てとして，ヒントカード（資料 3）を用意した。このヒントカードで，図 2 の一部を必要なところだけ抜き出し，円周角の定理や二等辺三角形の性質，接線の性質を用い，生徒が角の関係を一つずつ確かめていくことができるようにした。

△ ABD ∽△ ADC を示した後，相似比を用いて，AD の長さを求める。このとき，対応する辺を明らかにすることでわかりやすくなる。

(4) 全体交流

全体交流では，例として先に示した［証明 1］を取り上げる。何を根拠に等しい角を示したのかということを，生徒が図を用いながら説明し交流する。また，AD を求める計算の方法も確認する。ここで，AD の長さは約 65km と求めることができ，課題は解決できたが，生徒には「金華山の頂上から海はみえるのか。」という疑問が残ったままである。そこで，地図（[8]）に金華山を中心に半径 65km の円を描き（図 6），その円の内部に海が含まれているか確かめる活動をする。

(図 6)

3.2. 活動の様子

(1) 個人追究

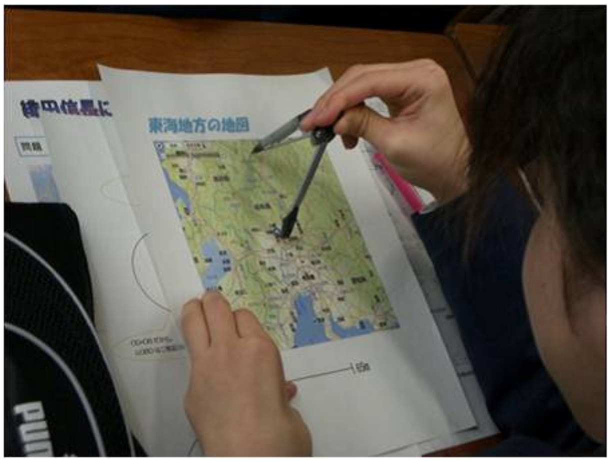
課題設定後，全体で 1 組の角が等しいことを確かめた。そして，残りの等しい 1 組の角を示す活動では，学習プリントに示した図に等しい角に印を付けたり，ヒントカードをもとに角の大きさを式で表したりして考えを深めていた。証明として文章にすることができていない生徒も，図を用いて「○○だから、この角とこの角が等しい。」と根拠を述べながら説明できた。多くの生徒が［証明 1］の方法で証明していたが，中には［証明 2］のように証明していた生徒もいた。証明に時間がかかり，AD の長さを求めるまで至らなかった生徒もいたが，相似比を用いて，

$$AB : AD = AD : AC$$

は，多くの生徒が導くことができていた。

(2) 全体交流

ヒントカードを用いて考えた生徒が多かったため，［証明 1］と同様の方法で証明した生徒を指名し，証明を説明させた。
AD の長さを求める計算も，生徒 B の「相似比が等しいことを理由に式を立てた。」という説明に，全員が納得できたようであった。
地図に金華山の頂上から見える限界の距離をコンパスで実際に描いてみると,「海は円の中に入っているよ。」,「下呂も円の中に入るよ。」などの声が上がった。



(写真 1)

4. 授業に対する考察

授業後にアンケートを実施した。その回答の一部を紹介する。

(1) 授業の始め，金華山からどこまで見えると思いましたか。

- 海
- 名古屋
- 名古屋より少しむこう
- オーストラリア
- マーサ（青山中学校に近いショッピングモール）
- 海は見えない

(2) 金華山から海が見えることに納得できましたか。また，それはなぜですか。

[はい]

- 証明したから
- コンパスで地図に描いたとき，円の中に海が入っていたから
- 計算で求めたから

[いいえ]

- 見えたことがない

[その他]

- 計算ではわかったけど，実感がつかめない
- 晴れていないと見えないと思う

(3) 今日の授業では，”およそ”ということをいくつか使ったのですが，どこに”およそ”が使われていたでしょう。

- AD の長さを 64.99⋯km を約 65km としたところ
- 地球の半径の長さ
- 金華山の高さ
- 二次方程式の解

(4) 授業の振り返り

- 最初は，予想もできなくて，ものすごく興味がありました。証明も，今までに習ったことを使えば簡単にできたので，よく復習をしようと思いました。
- いろいろなところで，相似が使えるということがわかりました。
- どこまで見えるかなどの大きな規模のことでも，図形を使って求めるということがとてもおもしろかった。
- 岐阜は海に面していないけど，海が見えるということに驚きました。
- はじめは見えないと思っていたから，コンパスで引いたとき，少し感動した。
- 今回も身近なことで学習できておもしろかった。こんなことが数学の証明で解くことができるというのが本当にすごいと思ったし，またやってみたいと思った。

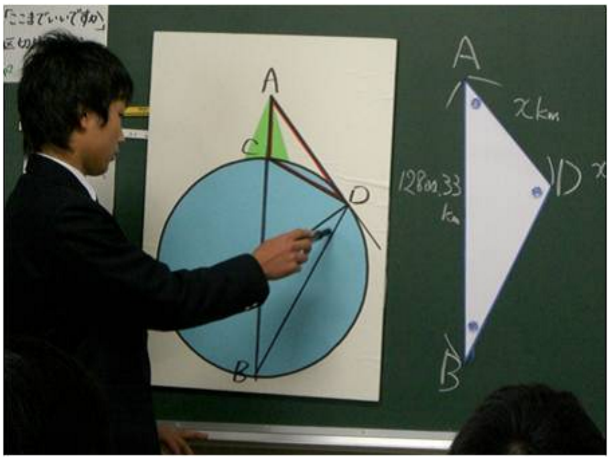
本授業のねらいの達成度について考察する。

(a) 日常生活から生じる問題の解決において，数学が有効な手段であることを感じることができる。

このねらいについて，アンケートでは「海が見えるということに驚いた」,「地図にコンパスで引いたとき、少し感動した。」,「身近なことが学習できて楽しかった。」等の感想が多かった。また，授業中の生徒の問題に取り組む姿や友達同士教えあう姿から達成できたと考える。

(b) 筋道立てて証明や説明することが，深い理解につながることを実感できる。

ほとんどの生徒が，個人追究のときにヒントカードを用いたり，友達と教えあったりすることで証明を書くことができていた。また，全体交流のときには説明した生徒の証明に納得できたようであった (写真 2)。また，アンケートの質問（2）の回答で,「証明したから海が見えることに納得した。」,「コンパスで円をかいたときに，円の中に海が入っていたから。」と答えた生徒もいた。本授業で，行った活動が理解につながっていると考えられる。このことから，このねらいは達成できたと考える。



(写真 2)

(c) 現実を理想化，単純化することの良さを感じ，考察に生かすことができる。

アンケートの質問（3）の回答から，生徒たちは，概数を意識して問題に取り組んでいたと考えられる。数値の近似も桁数の多い数を扱うときには有用な手段である。

一方で,「地球を球とみる」,「金華山の頂上から見える水平線を地図上に書き込むことができる」という近似，単純化や,「空気が澄んでいる」,「遮蔽物がない」という理想化を意識した回答が得られなかった。生徒には，数値の単純化だけでなく，図形の単純化や条件の理想化まで意識させることができなかったため，このねらいは十分に達成できていないと考える。

4. 今後の課題

今後の課題は，本教材の見直しである。

今回の実践では，授業のねらい (c) が十分達成することができていない。特に，現実を図として表すような理想化，単純化の有用性を生徒たちは感じることができていない。その原因として考えられる要因は，知識の不足と現実との差であると考える。中学校の段階では，地球が回転楕円体であることを学習しない。このような知識を補う必要がある。また，地図に円を描いたとしても，その円の内部がすべて見えるとは限らない。様々な遮蔽物によって，見える範囲は制限される。実際に見える限界の線は円にはならない。図として表すとき，数学の知識だけを用いるのではなく，理科や社会科の知識も用いなければ，理想化，単純化の有用性を感じることは難しいであろう。これらの数学的な見方や考え方を感じることができるような改善を行いたいと考える。また，実際に海が見えたときの写真などを用い，間接的にでも視覚的に確認できれば，生徒もより納得できる教材となると考える。

一方で，この教材から“ 弦 CD の長さを求めることで弧 CD の長さを近似して求める ”,“ 弧 CD の長さを計算によって求め，平面上での水平線の位置を描く ”,“ 遮蔽物を考えて，実際に見える範囲を求める ”というような実践を発展させたような教材の開発もできそうである。今回実践した教材を見直し，新たな面白さを見つけていきたいと考える。そして，子ども達が興味・関心を持ち，楽しく数学の有用性を感じることができるような，新たな教材を考えている。

引用文献

[1] 中央教育審議会，2008 年 1 月,「幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領の改善について（答申）」

[2] 平智享，1986 年，地図を作る，株式会社大月書店.

[3] 文部科学省，2008，中学校学習指導要領解説，数学編，教育出版株式会社.

[4] 吉田稔ほか 17 名，2006 年，新版中学校数学 3，大日本図書株式会社.

[5] 松永輝義，
http://www2s.biglobe.ne.jp/~

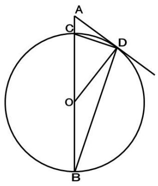
matuteru/main.htm

[6] 橋本吉彦ほか 20 名，2007 年，新版たのしい算数４上，大日本図書株式会社

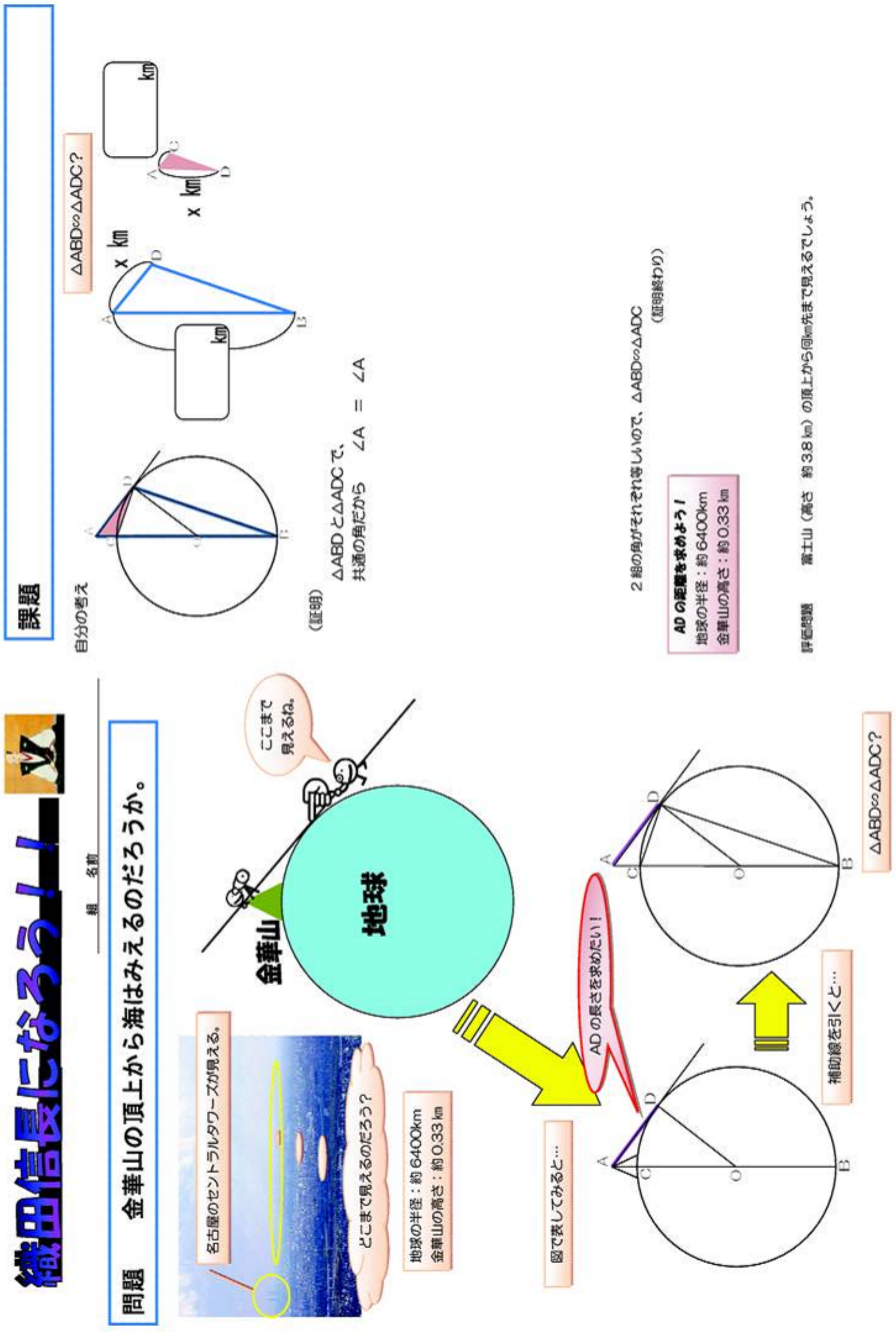
[7] 三浦登ほか 44 名，2002 年，新しい科学 2 分野下，東京書籍株式会社

[8] Yahoo 地図, http://map.yahoo.co.jp/print?type=scroll&v=2&lat=35.43016915&lon=136.78436609&sc=13&mode=map&pointer=on&home=on

（資料 1）

展開	ねらい	学習活動	指導（◇）と援助（◆）
導入	○金華山の山頂から見える限界は，地球に対する接線の接点であることに気づき，単純化して平面に図示することができる。	1. 金華山の頂上から見える景色を提示し，どこまで見ることができるのか疑問を持たせる。 **問題**　金華山から海は見えるのか。 2. 金華山の頂上から見える限界は，頂上を通る地球の接線と地球の接点までであることを理解する。 3. 地球，金華山，水平線の関係を図示し，求めたい距離がどこかということを明らかにする。	◆金華山の山頂から見える景色を写真で提示する。特に名古屋のビルが見えることに注目し，どこまで見えるのか疑問を持たせる。 ◇地球を球とみたり，立体を平面でとらえたり，遮蔽物が無いと仮定したりと理想化，単純化することで，考えやすくなることを確かめる。
展開	○三角形の相似条件を用いて △ ABD ∽△ ADC を示し，相似比を用いて AD の長さを求めることができる。	4. △ ABD ∽△ ADC であることを示し，相似比を用いて AD の長さを求めるという見通しを持つ。 **課題**　∠ ABD ＝∠ ADC を示し，相似の性質を使って AD の長さを求めよう。  （証明） △ ABD と△ ADC において， 共通の角だから， ∠ BAD ＝∠ DAC 円周角の定理，接線の性質より， ∠ ABD ＝　∠ ODB ＝　90 °－∠ ODC ＝　∠ ADC 2 組の角がそれぞれ等しいので， △ ABD ∽△ ADC （証明終） △ ABD ∽△ ADC より， AD：AC ＝ AB：AD よって， AD^2 ＝ AB × AC ＝ 4224.1089 ゆえに AD　65 したがって，求める距離は約 65km。	◇補助線を引き，△ ABD ∽△ ADC であれば AD の長さを求めることができることを言う。 ◇∠ BAD ＝∠ DAC は課題追求の前に抑え，∠ ABD ＝∠ ADC の証明をし，最終的に「２組の角がそれぞれ等しい」という相似条件に行きつけるようにする。 ◆手が止まった生徒を集め，自由に意見を出し合いながら一緒に考える。 ◆二等辺三角形の性質，円周角の定理，接線の性質，をもとに考えるように促す。 ◇証明をきちんと記述できなくても，根拠がはっきりと説明できればよいものとする。 ◆電卓を貸し出す。
まとめ	○山頂からどこまで見えるのか，地図に描く。	5. 山頂から 65km の地点を地図上に描き，その円の内部に海が含まれていることを確かめる。 6. アンケートの記入と評価問題を行う。	◇地図を配る。 ◇コンパスを用い，求めた距離を地図上に示す。 ◇評価問題を行う。

（資料 2）


織田信長になろう！！
組　名前
問題　金華山の頂上から海はみえるのだろうか。
名古屋のセントラルタワーズが見える。
どこまで見えるのだろう？
地球の半径：約 6400km
金華山の高さ：約 0.33 ㎞
金華山
地球
ここまで見えるね。
図で表してみると…
AD の長さを求めたい！
補助線を引くと…
△ABD∽△ADC？
課題
自分の考え
△ABD∽△ADC？
x ㎞
㎞
㎞
（証明）
△ABD と△ADC で、
共通の角だから　∠A ＝ ∠A
２組の角がそれぞれ等しいので、△ABD∽△ADC
（証明終わり）
AD の距離を求めよう！
地球の半径：約 6400km
金華山の高さ：約 0.33 ㎞
評価問題　富士山（高さ　約 3.8 ㎞）の頂上から何㎞先まで見えるでしょう。

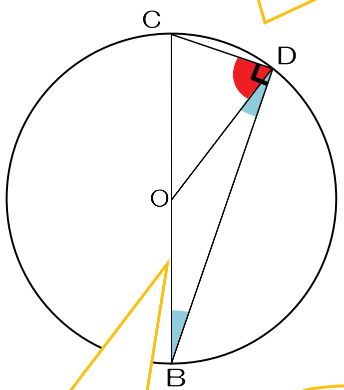
（資料 3）

ヒントカード

組　名前 ____________________

∠BDC は、半円の弧に対する円周角だから、

∠BDC＝90°だね。



∠ODB＝90°－∠ODC

と表すことができるから、

∠OBD＝

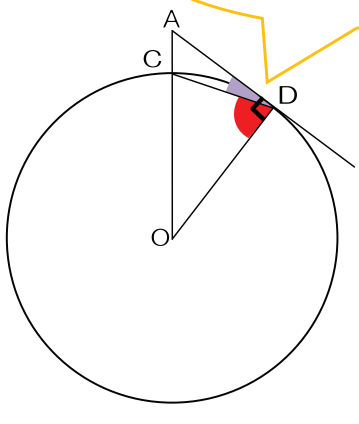
二等辺三角形の底角は等しいから…

OD=OB だから、

△OBD は二等辺三角形だよね。

AD は円 O の接線だから、

∠ODA＝90°



∠ADC＝

岐阜数学教育研究
2008, Vol.7, 109-116

日常生活における数学的要素を含んだ教材の開発

山田恵介[1]，愛木豊彦[1]

与えられた条件の中で，課題を解決するために，数学的な見方・考え方が必要となる場合がある。本論文では，数学的な見方・考え方の１つである単純化を用いて，手品に関する疑問を解決へと向かう授業を提案する。また，その授業を中学３年生を対象として実践した内容について報告する。

＜キーワード＞数学的な見方・考え方，単純化，手品

1．はじめに

本論文で示す授業の題材はトランプを使った「手品」である。その「手品」のタネ（手品が成功する理由）は 2.2 節で示すように，数学的に表現することができる。今回は，それを単純化した場合について考える授業を提案する。

ここで，片桐 [1] をもとに単純化について説明する。[1] では単純化について次のように述べている。「あるものにいくつもの条件があって，それが何々であるかが分かっていて，それらのすべての条件を考慮しなければならなくとも，その全部を考えるということは，はじめからはできにくいことがある。そういう場合には，そのうちのいくつかの条件を一時無視して，簡単な基本的な場合に直して考えてみようとすることがある。このような考え方が単純化の考え方である。しかし，いくら単純にしてみるにしても，もとの問題の本質的条件や一般性を損なってしまうほどに単純化してしまったのでは意味がない。単純化の際，一般性を失わないように注意しなければいけない。」

また，[1] で単純化の例として示されているものをあげる。

(例) 「A の体重は 36.6kg で，AはBの体重の 1.2 倍である。B の体重はいくらか」

という問題の演算が，はっきりしないとき，36.6 や 1.2 を簡単な整数に置き直して考える。

例えば,「A は 36kg で，A は B の体重の２倍である」としてみる。これは容易に，36 ÷ 2 でよいことがわかる。このことから，もとの問題も，36.6 ÷ 1.2 とすればよいだろうと考えられる。この例では，36.6 を 36 に，1.2 を２という考えやすい数値に置き換えたことが単純化に相当する。

このように「数学的な見方・考え方」の一つである単純化の考え方は，課題解決において重要な役割を果たす。本実践では単純化の考え方を用いて課題を追究する。この過程で，日常生活における数学の有用性を実感するとともに，数学的な見方・考え方を養っていきたい。

2．題材について

2.1. 手品の紹介

本授業で扱う手品の手順は次の通りである。

(i) ジョーカーを除く５２枚のトランプを用意する。
(ii) 用意したトランプを数回カットする。
(iii) 相手に１枚好きなカードをひいてもらう。
(iv) 相手がひいたカードを当てる。

[1]岐阜大学教育学部