

帰納的態度を養う教材の開発と実践

竹内雅人¹, 愛木豊彦¹

数学の学習課程が見直される中, 特に「数学的な見方や考え方」の育成が重要視されている。そこで、「数学的な見方や考え方」の1つである「帰納的な考え方」に焦点を当てて教材開発を行うことにした。本教材には「帰納的な考え方」に基づき「個々の具体的な例から推測し, その考えが誤っているならば修正し, その修正した考えが正しいことを論証していく」という活動が組み込まれている。本論文では, 2007年12月末に行った中学校3年生の選択数学の授業における実践について報告する。

<キーワード> 帰納的な考え方, 推測, 立体, 3次関数

1. はじめに

近年「数学的な見方や考え方」の育成が重要視されている。ここでは, 数学的な見方や考え方の1つとして, 帰納的な考え方を取り上げる。帰納的な考え方とは, いくつかの事例からそれらに共通する規則を見出し, その規則がいつでも成り立つことを示すという思考の一連の流れをいう。この考え方は, 数学において重要なのは言うまでもなく, 日常生活においても有効である。その一方「二度あることは三度ある」といったように, 安易な一般化は実生活において有害なこともあり, 子ども達に正しい帰納的な考え方を身につけさせなければならない。ポリアは「帰納と類比」[1]において「帰納的態度」として, 次の3つの事柄を要求している。1つ目に, われわれの信念のどの一つでも, 喜んで修正する用意があること。2つ目に, 信念を修正すべきのつぴきならない理由がある場合には, それを修正すべきであること。そして3つ目に, 十分に理由もないのに, 気まぐれに信念を修正すべきでないことである。

そこで本論文では「帰納的態度」をポリアの考えをもとに「まず, 自分の考えを持つこと。もし自分の考えに誤りがあれば, それを修正すること。そして, それが正しいことを

論証していこうとする態度」ととらえ, それを育成できる授業案を開発することにした。いくつかの事例から規則を推測し, それを論証するという活動は教科書でも取り上げられているが, ポリアのいう「修正」を伴う活動は少ない。従って, 修正する場面が設定されている授業案の開発には十分意味があると考えた。

2. 授業の内容

2.1. 教材の説明

前節で示した条件を満たす授業を行うため, 一般項が $a_n = 6n^2$, $b_n = n^3 + 8n$ で与えられる2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考え, 第 n 項の値の比較をするという題材を選んだ。その理由は次の通りである。まず, $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の $n = 1, 2, 3, 4, 5$ のときの値を表1で示す。

n	1	2	3	4	5
a_n	6	24	54	96	150
b_n	9	24	51	96	165

(表1)

表1からすぐわかるように, $n = 1$ のとき $a_1 < b_1$, $n = 2$ のとき $a_2 = b_2$, $n = 3$ のとき $a_3 > b_3$, $n = 4$ のとき $a_4 = b_4$, $n \geq 5$ のとき $b_n > a_n$ である。中学校では3次関数や原点を通らない2次関数を扱っていないので, こ

¹岐阜大学教育学部

ここで示したように2度も大小関係が変化する関数の値の比較を体験したことがない。従って、生徒は $n=1,2,3$ のときの a_n と b_n の値を見ると、 $n \geq 4$ のときも、 $a_n > b_n$ と推測するのではと考えた。しかし、実際には $n \geq 5$ のとき、 $b_n > a_n$ となり、推測した規則を修正しなければならない。ここで述べたように、自分の考えを修正する場面を設定できるので、2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の値の比較を題材とした。また、「帰納的態度」を育成するためには、推測した規則を論証する場面が必要である。現行の学習指導要領 [2] において、不等式については不等号の定義を簡単に学ぶだけである。従って、 $n \geq 5$ のときに、 $b_n > a_n$ となることを、文字式だけで説明することは、中学生にとって困難である。そこで、数列の規則を視覚的に分かりやすくとらえるため、そして、 $n \geq 5$ のときに $b_n > a_n$ となる理由を考察できるようにするために、体積が a_n で表される立体の列（以下、A列とよぶ）と、体積が b_n で表される立体の列（以下、B列と呼ぶ）の2つを授業に導入することにした。具体的には、A列の立体はすべて直方体であり、それらは高さが一定で、底面積がその番目の2乗に比例するものとする（写真1）。一方、B列の立体は、一辺の長さがその番目に比例する立方体と、横の長さとは高さは一定で、縦の長さがその番目に比例する直方体とを合わせた立体からなるものとする（写真2）。

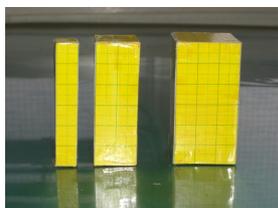


写真1

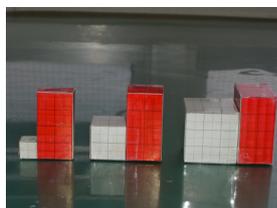


写真2

写真1では、A列の1番目、2番目、3番目の立体、写真2では、B列の1番目、2番目、3番目の立体が左から順に提示されている。このような立体模型を用いることで、例

えば $n \geq 6$ のとき、 $b_n > a_n$ となることが中学生でも説明可能になる。6番目のA列の立体と、B列の立体の2つ（写真3）を見比べると分かるように、A列の立体と、B列の立方体の部分の体積が、同じであることがわかり、B列の直方体の部分の体積だけ、B列の立体の方が大きいことが分かる。そして、7番目のA列の立体と、B列の立体の2つ（写真4）を見比べれば、6番目のときの立体に比べ、A列の立体は横と縦の長さが増加し、高さが一定のままなのに対して、B列の立体の立方体の部分は、横と縦と高さの長さすべてが増加しているため、B列の立体の立方体の部分のみでも、A列の立体よりも大きいことが分かる。このことから、 $n \geq 8$ のときも、B列の立体の立方体の部分だけを比べても、A列の立体よりも大きいので、 $b_n > a_n$ が成り立つことが分かる。このように、 a_n と b_n を立体の体積とみることで、 $n \geq 6$ のとき $b_n > a_n$ となることが説明できる。

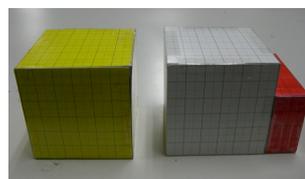


写真3

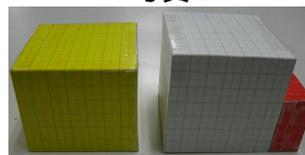


写真4

2.2. 授業の設定

生徒が題材に興味を持てるように、導入で以下のような2つの鉱山があることにする。

- ・A鉱山、B鉱山では1年ごとに金の採掘量が増えていく。

- ・写真1、写真2で紹介した立体模型（1マス1cmの方眼紙でできている）は、それぞれA鉱山、B鉱山の1年目、2年目、3年目の金の採掘量を表している。

2.3. 授業の流れ

授業の詳細は指導案(文末資料1)で示す。ここでは、授業の流れを簡単に述べる。

1. 鉱山を知らない生徒がいるかもしれないので、鉱山とはどういうものを写真を使って説明する。そして、2.2節で示した2つの架空の鉱山の存在を仮定する。
2. 「A鉱山、B鉱山では、1年ごとに金の採掘量が増えていく。どちらの鉱山がより多くの金を採掘できるだろう。」という問題を提示する。
3. 写真1、写真2で紹介した計6つの立体模型を生徒一人ずつに配布して、各鉱山の立体模型が、それぞれどんな規則で1年ごとに大きくなっているのかを調べ、見つけた規則をまとめる。
4. A鉱山、B鉱山の3年目までの採掘量をまとめた表から、4年目以降はどちらの鉱山がより多くの金を採掘できるか推測する。
5. 「4年目以降の金の採掘量を調べよう。」という課題を設定する。
6. 各鉱山の7年目までの採掘量を調べるとともに、なぜ5年目以降B鉱山の採掘量が多いと言えるのかについて、意見交流を行う。

次に、授業における工夫点を述べる。1つ目は立体模型を着色したことである。A列の立体を黄色に塗り、B列の立体は、立方体の部分を白色、直方体の部分を赤色にそれぞれ塗った。着色したのは、A列とB列の立体を呼ぶときに、「黄色の方は…」というようにわかりやすくするためと、B列の立体模型を2つの立体に分けて考えられるようにするた

めである。

2つ目は、個人追究の時間用に、各鉱山4～7年目の採掘量を表す立体模型(写真6)を用意したことである。その理由は、規則が把握できていない生徒でも、この立体模型を参考に採掘量を調べられるようにしたためである。また、各鉱山7年目までの採掘量全てを調べ終わった生徒が、5年目以降は常にB鉱山の方がA鉱山よりも採掘量が多いことの原因を、この立体模型を用いて説明できると判断したからである。

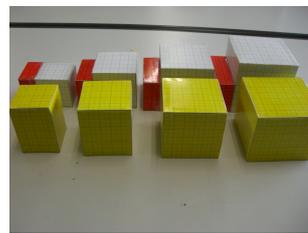


写真6

2.4. 教材のねらい

今まで述べてきたことから、授業のねらいを以下の4点にした。

- (1) 各鉱山の3年分の採掘量の変化の様子から、4年目以降、どちらの鉱山がより多くの金を採掘できるか予想することができる。
- (2) 各鉱山7年分の採掘量を調べ、最終的にどちらの鉱山がより多く金を採掘できるか判断できる。
- (3) 5年目以降はずっとB鉱山の採掘量が多い理由を説明することができる。
- (4) 上の(1)～(3)を通して帰納的態度を身につけることができる。

3. 実践結果

以下の通りに実践を行った。

場所：岐阜県岐阜市立青山中学校

日程：平成18年12月25日第4校時

参加生徒：選択数学の3年生の生徒22人

3.1. 活動の様子

1. 立体模型の規則見つけ

写真1, 写真2で紹介した各鉱山3年分の採掘量を表す立体模型6個を, 生徒一人ずつに配布して, どんな規則で1年ごとに立体が大きくなっているのかを考察した。

生徒が推測した規則を紹介する。

生徒A … 黄色の立体の体積が, 高さが全部6 cmなので6の倍数になっている。

生徒B … 黄色の立体の底面の面積が, 年数の2乗になっている。

生徒C … 白は立方体で, 体積は年数の3乗になっている。赤の方は, 体積が1年目の立体を基準に2倍, 3倍になっている。

2. 予想

各鉱山3年目までの採掘量を調べ, 4年目以降どちらの鉱山がより多くの金を採掘できるか, 生徒に予想させた。結果は以下の通りである。

- ・ A 鉱山 … 19人
- ・ B 鉱山 … 2人
- ・ A 鉱山, B 鉱山が1年ごとに入れ替わっていく … 1人

3. 個人追究

各鉱山7年分の採掘量を調べた後, 実際に4年目以降の立体模型を使って, 5年目以降ずっとB鉱山が多い理由を考える生徒や, 立体の体積の変化を, $y = 6x^2, y = x^3 + 8x$ と表す生徒もいた。

4. 全体交流とまとめ

個人追究の時間に, 生徒全員が各鉱山7年分の採掘量を表にまとめることができた。その表から, 5年目以降は, いつでもB鉱山の金の採掘量の方が多いという推論を持った。さらに, その理由を全体交流の場で議論した。そのときの生徒の発言を紹介する。

・ 5年目以降の立体模型を使うと分かったのだけど, 黄色の方は底面の正方形は広がっていくけど高さが一定で, 白色の方は高さも大きくなっているから, B鉱山の方が採掘量が多い。

4. 実践結果からの考察

授業後にアンケートを実施した。そこに書かれた生徒の感想の一部を紹介する。

4.1 生徒の感想

・ 実際にブロックみたいなものを使うことで, 変化のしかたや, 体積の出し方がよくわかった。

・ 何事も確かめてみないとわからないので, 少しいことで判断してはいけないと思った。

・ 3年分の採掘量だけを調べても結果は分からないから, たくさん追究することが大切だと思った。

・ 3次関数という分野があり, 3次関数の方が2次関数よりも増え方が多いとわかった。

・ 表をまとめるのは楽だったけど, 規則を見つけるのが大変だったので, ヒントがもう少しほしかった。

4.2 ねらいの達成度

アンケートに書いてある生徒の感想や授業中の様子から, 本授業のねらいが達成できたかどうかを考察する。

(1) 各鉱山の3年分の採掘量の変化のしかたから, 4年目以降, どちらの鉱山がより多くの金を採掘できるか予想することができる。

アンケートの「はじめに, A 鉱山とB 鉱山のどちらが多く金が採掘できると予想しましたか? 選んだ理由も教えてください。」という質問に対し, A 鉱山と答えた生徒の多くが, 「1回AがBを抜かしているから, その関係が続くと思った。」と回答している。また, B 鉱山と答えた生徒は, 「B 鉱山の採掘量を関数であらわすと, $y = x^3$ を含んでいて, 変化のしかたが多いから。」と回答していた。以上のことから, 各鉱山の3年分の採掘量の変化に着目して, その量の変化をもとに, 4年目以降どちらの鉱山の採掘量が多いか予想できていることがわかる。よって, このねらいは達成できたと考える。

(2) 各鉱山7年分の採掘量を調べ, 最終的にどちらの鉱山がより多く採掘できるか判断

できる。

全ての生徒が個人追究の時間に、各鉱山7年分の採掘量を調べることができていた。そして、各鉱山7年分の採掘量を調べ終えた時点での「最終的にどちらの鉱山がより多くの金を採掘できるのか。」という質問に対して、B鉱山だという判断を行うことができていた。よって、このねらいは達成できたと考える。

(3) 5年目以降はずっとB鉱山の採掘量が多い理由を説明することができる。

個人追究の時間、各鉱山7年分の採掘量を調べ終わった生徒に対して、なぜ5年目以降はずっとB鉱山の採掘量が多いのか、その理由を考えるよう促したのだが、多くの生徒がそれを当り前なことだと決めつけて、論証する姿をあまり見ることはできなかった。よって、このねらいは達成できなかった。

(4) 上の(1)~(3)を通して帰納的態度を養うことができる。

アンケートの「5年目以降は、B鉱山の方がA鉱山より多くの金が採掘できることがわかって、思ったことを教えてください。」という質問に対して「A鉱山、B鉱山のどちらの採掘量が多いかということで、予想とは違ったけど、なぜそうなるのかが分かってよかった。」「はじめはAだと思っていたけど、Bの白いブロックは、体積が年数ごとに一番多く

なっていくからだと思いました。」等の回答があった。これらの回答より、多くの生徒が、自分の考えを持ち、その誤りを修正し、他の生徒の意見を聞いてではあるが、修正した考えが正しいことを論証することができている。すなわち、帰納的態度の一連の流れを行うことができていると考える。よって、このねらいは達成できたと考える。

5. 今後の課題

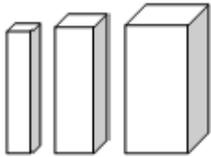
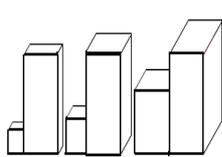
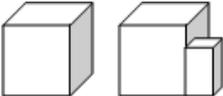
今後の課題は教材の見直しである。今回の授業では、鉱山など、架空の設定が多かったので、その説明に時間がかかってしまった。また、生徒たちが、その架空の設定に対して、戸惑いを感じ、授業に馴染みにくかったのではないかと考える。従って、今後の教材開発においては、生徒たちにとって、簡潔で身近な題材を選ぶ必要がある。

引用文献

[1] G.Polya, 1958, 帰納と類比, 丸善株式会社.

[2] 文部省, 1999, 中学校学習指導要領(平成10年12月)解説 数学編, 大阪書籍株式会社.

(資料1)

過程	ねらい	学習活動	指導・援助																														
導入	<p>本時の授業で行う活動を大まかに理解する。</p> <p>立体模型を参考に、体積の増え方の規則を見つける。</p> <p>4年目以降の金の採掘量が調べられるよう、しっかりと規則を理解する。</p>	<p>1. 本時の問題を提示する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>問題</p> <p>A 鉱山, B 鉱山では, 1 年ごとに金の採掘量が増えていく。どちらの鉱山が, より多くの金を採掘できるだろう。</p> </div> <p>2. A, B 鉱山の金の採掘量を表す立体を生徒に配布する。</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;"> <p>A 鉱山</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>B 鉱山</p>  </div> </div> <p>3. 立体模型に注目して, 規則見つけを行う。</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">A 鉱山</th> <th style="width: 50%;">B 鉱山</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>・高さは常に 6 cm である。</td> <td>白について ・立方体一辺の長さが 1 cm ずつ増えている。</td> </tr> <tr> <td>・底面の一辺の長さが 1 cm ずつ増えている。</td> <td>赤について ・常に直方体の横は 2 cm、高さは 4 cm である。 ・縦が 1 cm ずつ増えている。</td> </tr> </tbody> </table> <p>4. 立体模型や規則をもとに, 3年目までの採掘量を表にまとめ, 4年目以降どちらの鉱山がより多くの金を採掘できるか推測する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>学習課題</p> <p>4年目以降の金の採掘量を調べよう。</p> </div> <p>5. A 鉱山, B 鉱山の 4 ~ 7年目の金の採掘量を調べ, 表に書き込む。</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="width: 10%;">年数</th> <th style="width: 10%;">1年目</th> <th style="width: 10%;">2年目</th> <th style="width: 10%;">3年目</th> <th style="width: 10%;">4年目</th> <th style="width: 10%;">5年目</th> <th style="width: 10%;">6年目</th> <th style="width: 10%;">7年目</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A 鉱山</td> <td>6</td> <td>24</td> <td>54</td> <td>96</td> <td>150</td> <td>216</td> <td>294</td> </tr> <tr> <td>B 鉱山</td> <td>9</td> <td>24</td> <td>51</td> <td>96</td> <td>165</td> <td>264</td> <td>399</td> </tr> </tbody> </table> <p>6. 5年目以降の B 鉱山の金の採掘量が常に多い理由を考える。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・7年目以降は, 白だけで十分黄色より大きい。 ・下図のように, 6年目で黄色と白の体積が同じ。赤の分だけ B の方が多い。 <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">  </div>	A 鉱山	B 鉱山	・高さは常に 6 cm である。	白について ・立方体一辺の長さが 1 cm ずつ増えている。	・底面の一辺の長さが 1 cm ずつ増えている。	赤について ・常に直方体の横は 2 cm、高さは 4 cm である。 ・縦が 1 cm ずつ増えている。	年数	1年目	2年目	3年目	4年目	5年目	6年目	7年目	A 鉱山	6	24	54	96	150	216	294	B 鉱山	9	24	51	96	165	264	399	<p>・鉱山の説明を写真を使って行う。</p> <p>・立体模型の説明を詳しくする。(A 鉱山の立体には黄色。B 鉱山の立体は赤と白に着色してある。)</p> <p>・規則を黒板にまとめていく。</p> <p>・4年目以降の立体模型を用意しておく。</p>
A 鉱山	B 鉱山																																
・高さは常に 6 cm である。	白について ・立方体一辺の長さが 1 cm ずつ増えている。																																
・底面の一辺の長さが 1 cm ずつ増えている。	赤について ・常に直方体の横は 2 cm、高さは 4 cm である。 ・縦が 1 cm ずつ増えている。																																
年数	1年目	2年目	3年目	4年目	5年目	6年目	7年目																										
A 鉱山	6	24	54	96	150	216	294																										
B 鉱山	9	24	51	96	165	264	399																										
展開	<p>各鉱山 3年分の採掘量をもとに, 4年目以降どちらの鉱山がより多くの金を採掘できるか推測することができる。</p> <p>立体模型を用いて, 5年目以降は常に B 鉱山の採掘量が多い理由を説明することができる。</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <p>まとめ</p> <p>5年目以降は, ずっと B 鉱山の採掘量が多い。</p> </div> <p>・評価問題に取り組み, アンケートを記入する。</p>	<p>・表を完成させた生徒に, なぜ5年目以降は常に B 鉱山の採掘量が多いのか, その理由を考えさせる。</p> <p>・生徒に立体模型を使って, 説明させる。</p>																														
まとめ																																	