

数学と物理学を結ぶ授業の提案と実践

～ベクトルを題材とする実験を取り入れた授業～

久保田滝敏¹, 愛木豊彦²

数学と物理学は、歴史的に見ても、現時点の科学においても、また高校教育の視点からも、つながりは強く、一方の理解がもう一方の理解を促すという一面をもっている。ところが現行の高校数学では、この関連性に触れる機会があまりないので、生徒達はそのつながりを感じていないようである。そこで本稿では、ベクトルを用いて、三角形の重心を実験しながら数学と物理学の両面から考察する授業を提案する。授業を構成する際に、与えられたもので単に実験をするのではなく、自分達で手を動かす場面が多くなるよう工夫した。

<キーワード>ベクトル, 重心, てこの原理, ものづくり

1. はじめに

数学と物理学は、歴史的に見ても、現時点の科学においても、また高校教育の視点からも、つながりは強く、一方の理解がもう一方の理解を促すという一面をもっている。ところが現行の高校数学では、この関連性に触れる機会があまりないので、生徒達はそのつながりを感じていないようである。現在の高校数学の教科書で、物理学との関連が述べられているのは、章末のコラム・研究・発展以外に数学B [1] のベクトル, 数学III[2] の微分係数の導入時における平均の速さと瞬間の速さ, 数学III[3] の速度と加速度における直線上の点の運動・平面上の点の運動・等速円運動ぐらいである(表1)。それ以外の単元でも、章末問題や例題に物理学の内容を入れるなど工夫してあるが、問題や例題として1問だけ突然でてくるので、生徒にとって物理学とのつながりを感じにくい。

そこで、本稿では生徒が数学と物理学のつながりを感じられるような授業の提案を行うこととした。具体的には、ベクトルを用いて、三角形の重心を実験しながら数学と物理学

の両面から考察する授業を提案する。実験については、生徒達が手をうごかす場面が多くなるようにし、手をうごかす楽しさや実験が成功した時の喜びを味わえるように工夫した。

物理学と関連する内容

(例題・問題)

- ・鉛直投げ上げ運動(数学I 2次関数)
- ・コバルト60の崩壊(数学II 対数関数)

(コラム)

- ・振動現象(数学II 三角関数)
- ・重心と重力(数学A 平面図形)

(研究)

- ・速度と導関数(数学II 微分・積分法)
- (発展)

- ・速度とみちのり(数学III)
- ・微分方程式(数学III)

(教科書内容)

- ・ベクトル(数学B)
- ・微分法・積分法(数学II)

微分係数(平均の速さと瞬間の速さ)

- ・微分法の応用(数学III)

速度と加速度(直線上の点の運動, 平面上の点の運動, 等速円運動)

(表1)

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部

本稿の構成は、次の通りである。第2節で本授業の主題として重心を選んだ理由を述べる。そして、つり合いの位置についてモーメントを用いて第3節で考察する。第4節では、実験方法を紹介する。第5節では、第2節から第4節までの内容をもとに、どのように授業を構成したかを述べる。第6節では、授業の内容を詳述し、第7節と第8節で実践結果を紹介し、結果について分析する。そして、最終節で今後の課題を述べる。

2. 重心

高校の数学で定義する三角形の重心と高校の物理学で定義する重心は、それぞれ以下の通りである。

「数学A」[4]

定義 中線

三角形の頂点と対辺の中点を結ぶ線分を中線という。

定理

三角形の3つの中線は1点で交わり、その点は各中線を2:1に内分する。

定義 三角形の重心

三角形の3つの中線の交点を、三角形の重心という。

「物理I」[5]

定義 重心

物体に大きさがあるとき、物体の各部分にはたらく重力の合力の作用点と考えてよい点が1つあり、この点をその物体の重心という。重心で物体を支えると物体は回転しない。

数学が図形（三角形）で定義しているのに対し、物理学では物体で定義している。そこに、重心に対する数学と物理学との溝が感じられる。そこで、薄い板の三角形（実際は三角柱）を用意し、各頂点におもりをつけた状態で水平につり合わせる実験を行い、その実験の考察を通して数学の三角形の重心と物理学の重

心を結びつけることにした。水平につり合う点の位置を求めるためには、三角柱の重心の位置を求めなければならない。三角柱がつり合う場合は、三角柱の重心の鉛直線上に上面の三角形の重心がある。よって、上面の三角形の重心を用いれば水平につり合う点の位置を導き出すことができる。その導きだした点で吊す実験を行い、考察することによって、数学の図形（三角形）の重心と物理学の重心を結びつけることができると考えた。また、そのことが数学の図形（三角形）の重心の理解を促すことになると期待する。

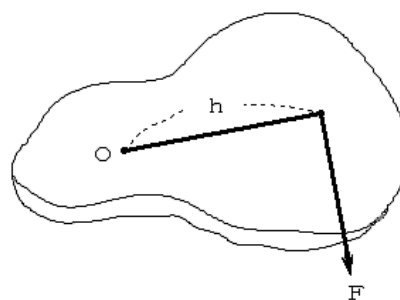
3. つり合いの位置

物体のつり合う点の位置を求めるためには、モーメントを用いなければならない。モーメントはベクトルによって表現されるが、高等学校の物理の教科書では、モーメントを次のように定義し、ベクトルを用いていない。

定義 力のモーメント

物体を回転させるはたらきは、力の大きさ F と、回転軸 O から力の作用線におろした垂線の長さ h との積に比例する。この積 M を、軸 O に関する力のモーメントという（図1）。

$$M = Fh$$



（図1）

物体がある点のまわりで回転するとき、左まわりと右まわりの2通りがあるが、この定義だとその回転方向を表すことはできない。そこで、外積（ベクトル）を用いて、次のように

モーメントを定義する。

定義 モーメント

点 O 、点 A 、ベクトル $\vec{a}$ が与えられたとき、 O に関する A の位置ベクトルを $\vec{r}$ とする。このとき、 $\vec{r} \times \vec{a}$ を $\vec{a}$ の O のまわりの A におけるモーメントといい、 $M_O(A, \vec{a})$ で表す。

この定義により、回転方向も表すことができる。これを用いて、力のつり合いは次のように定義される。

定義 力のつり合い

1つの物体（剛体）の点 $A_i (1 \leq i \leq n)$ に、それぞれ力 $\vec{f}_i$ が働くとする。このとき、次の2つの条件が成り立つならば、その物体はつりあうという。

(i) $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots + \vec{f}_n = \vec{0}$

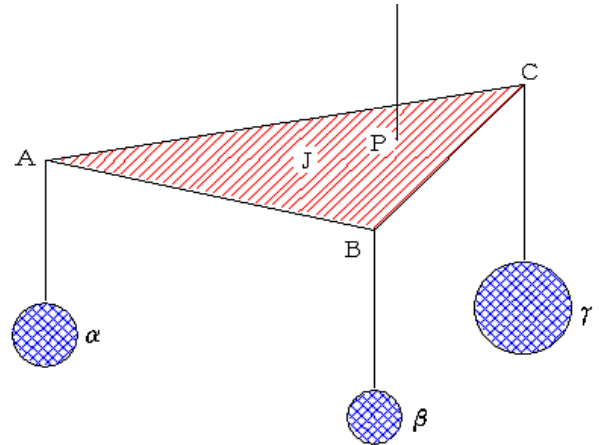
(ii) 任意の点 O について

$$\sum_{i=1}^n M_O(A_i, \vec{f}_i) = \vec{0}$$

力のつり合いの定義を用いて、薄い板で作った三角形の各頂点におもりをつけたときの加重重心の位置ベクトルとつり合う点の位置について簡単に説明する。

薄い板で作った $\triangle ABC$ の各頂点におもりを吊り下げて水平につり合うてを考える。 $\triangle ABC$ の重さを m 、各頂点に吊るされたおもりの重さをそれぞれ α, β, γ 、各頂点の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 、 $\triangle ABC$ の重心を $J (\vec{j})$ 、支点を $P (\vec{p})$ とする (図2)。このとき

$$\vec{p} = \frac{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + m \vec{j}}{\alpha + \beta + \gamma + m}$$



(図2)

(証明)

P にかかる力を $\vec{f}$ 、重力加速度を $\vec{g}$ とする。支点でつり合っているとするとモーメントもつり合っているので、定義より

$$\begin{aligned} & (\alpha \vec{g}) \times \overrightarrow{PA} + (\beta \vec{g}) \times \overrightarrow{PB} + (\gamma \vec{g}) \times \overrightarrow{PC} \\ & + (m \vec{g}) \times \overrightarrow{PJ} + \vec{f} \times \overrightarrow{PP} = \vec{0}, \\ & (\alpha \vec{g}) \times (\vec{a} - \vec{p}) + (\beta \vec{g}) \times (\vec{b} - \vec{p}) + \\ & (\gamma \vec{g}) \times (\vec{c} - \vec{p}) + (m \vec{g}) \times (\vec{j} - \vec{p}) = \vec{0}, \end{aligned}$$

$$\vec{p} = \frac{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + m \vec{j}}{\alpha + \beta + \gamma + m} \quad (1)$$

(証明終了)

これは加重重心の位置ベクトルを表す。これから、 P の位置を求めるためには、

$$\vec{j} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad (2)$$

であるから、次のように変形すればよい。

(2) を (1) に代入すると

$$\begin{aligned} & \vec{p} \\ &= \frac{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + m \times \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}}{\alpha + \beta + \gamma + m} \\ &= \frac{(m + 3\alpha) \vec{a} + (m + 3\beta) \vec{b} + (m + 3\gamma) \vec{c}}{3(m + \alpha + \beta + \gamma)} \end{aligned}$$

(3)

ここで、線分BCを $(m+3\gamma):(m+3\beta)$ に内分する点をL、位置ベクトルを $\vec{l}$ とすると

$$\vec{l} = \frac{(m+3\beta)\vec{b} + (m+3\gamma)\vec{c}}{2m+3\beta+3\gamma}$$

よって、

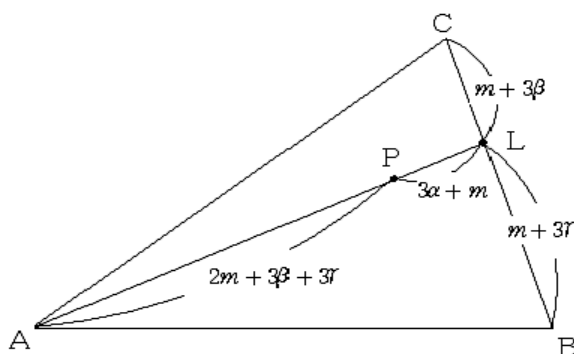
$$\vec{p} = \frac{(m+3\alpha)\vec{a} + (2m+3\beta+3\gamma)\vec{l}}{3(\alpha+\beta+\gamma+m)}$$

$$= \frac{(m+3\alpha)\vec{a} + (2m+3\beta+3\gamma)\vec{l}}{(2m+3\beta+3\gamma) + (m+3\alpha)}$$

この式から、Pが線分ALを

$$(2m+3\beta+3\gamma):(3\alpha+m)$$

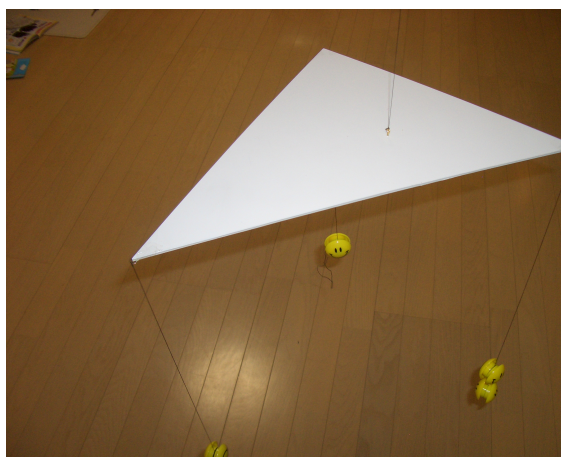
に内分する点であることがわかる(図3)。



(図3)

4. 実験方法

水平につり合う点Pの位置を求めるためには、第3節で求めた(5)の比の値に、実測した数値を代入すればよい。厳密にみれば、おもりを吊るす糸や糸を固定するセロハンテープ等にも質量があるが、おもりや三角形の重さに比べてわずかな量であり、実験には、ほとんど影響しないのではないかと考えた。これを確認するため、糸やセロハンテープの質量を考慮せずに計算で求めた位置を支点にして、水平につり合うかどうか実験したのが(写真1)である。



(写真1)

(4) 材料は

- ・低発泡塩ビ板
- ・Rピン(4パイヨウ)
- ・真中ひーとん(NO.C)
- ・糸
- ・セロハンテープ
- ・おもり用の磁石

(5)

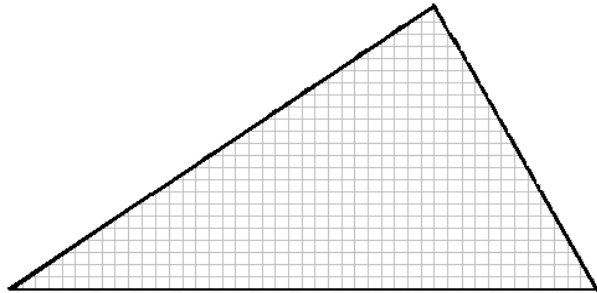
である。はかりは 0.1 g まで実測可能なEK400Hを使用した。三角形は低発泡塩ビ板でつくり(カッターナイフですぐに切れる)、つり合う点の位置に真中ひーとん(NO.C)を取り付けた(低発泡塩ビ板は簡単に真中ひーとんを取り付けることができる)。各頂点にはセロハンテープでRピン(4パイヨウ)を取り付け、そこにおもり用の磁石にとりつけた糸を結んだ。実験の結果は、つり合いの定義や加重重心の位置ベクトルの式(1)が正しいことを生徒に納得させるのに十分なものであった。

5. 授業展開

第3節で述べたベクトルを用いたつり合いの位置の求め方を示し、最後に前節で述べた実験を行うという展開で授業を進める。しかし、今回の実験ではベクトルを学習していない生徒が多数参加すること、実践時間が2日間で合計10時間しかないことと理由で第3節の内容を全て扱うことができない。そこで、次の2点を削除または簡略化した。

(1) 実験において、つり合いの位置を求めるためには、三角形の辺の長さや比(5)を用

いなければならない。また、式(3)から(5)のように内分の比を求めることは、高校数学において重要な計算の一つである。しかし、時間が足りないで、これを扱わないことにした。その代わりに、図4のように三角形に方眼紙を貼り、座標を用いてつり合う点の位置を求められるようにした。



(図4)

$\triangle ABC$ を座標平面上で考えれば、 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の成分と座標が一对一に対応するから、 $\triangle ABC$ の重心の位置ベクトルの成分を求めた後、加重重心の位置ベクトルの式(1)に、それぞれの成分を代入すれば、 $\vec{p}$ の成分、つまりPの座標を求めることができる。

(2) 次に、授業において(1)をどのように導くかについて説明する。第3節で示したモーメントから出発する方法は難しすぎる。そこで、いきなり三角形で考えるのではなく、棒状のものを考え、それを手がかりにして(1)を導けるようにした。詳しくは第6節で述べるので、ここでは概略を示す。まず、小学校の理科[6]で学習した「てこの原理」を導入とする。この原理をもとに、実験について分析したり、重心、ベクトルについて学習したりしながら棒のつり合いについて考察していく。そして、棒のつり合い(1次元)を表すベクトルの式をもとに三角形のつり合い(2次元)を表す式(1)を予想させることにした。そして、この予想が正しいことは、実験結果をもって、生徒に確認させることにした。

次に、実験させるにあたって工夫した点を述べる。それは、実験するために配布する三

角形の大きさ、おもりの重さを統一しなかったことである。統一しなかった理由は、次の2つである。1つ目は、実験の考察結果で加重重心の位置ベクトルの式(1)を正しいと結論づけるためには色々な条件(重さ、大きさを変えても言えるのか)で試す必要がある。しかし、1人で条件を変えて実験することは時間的に不可能であり、参加者全員の結果を利用する必要があったからである。2つ目は、以前の高校生と比べて物をつくった経験が乏しいのでは、と感じる場面にしばしば遭遇するようになったためである。実際、その直観を確認するため、平成19年6月に高校1年生117人を対象に、ものづくりに対するアンケートを行った(文末 資料1)。本来、ものをつくるということは楽しく、その過程において生じた困難を試行錯誤や数学を使って論理的に解決する経験ができる重要な場面である。そのような経験の乏しさが、昨今指摘されている数学を進んで活用しようとしめない態度につながっていると考えられる。そこで、全員の条件を変えることにより、ものづくりの疑似体験が出来ないかと考えたからである。

以上で述べた事由により、ベクトルを用いて、三角形の重心を実験しながら数学と物理学の両面から考察する2日間の学習内容を次の6項目に分けて実践することにした。

1日目

- ①てこの原理(棒上でのこ)
- ②正三角形の1つの頂点とその対辺におもりをつけたとき水平につり合う点の位置
- ③数直線、座標平面

2日目

- ④ベクトル
- ⑤三角形の各頂点におもりをつけたとき水平につり合う点の位置
- ⑥実験で⑤を確認

次節で、学習内容についてさらに詳しく述べる。

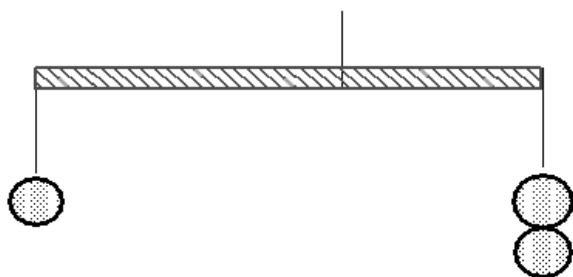
6. 学習内容

6.1. てこの原理（棒上のでこ）

小学校5年の理科（文末 資料2）で学習した「てこの原理」を確認した後、岩崎・愛木[7]で実践した次の問題を導入とする。

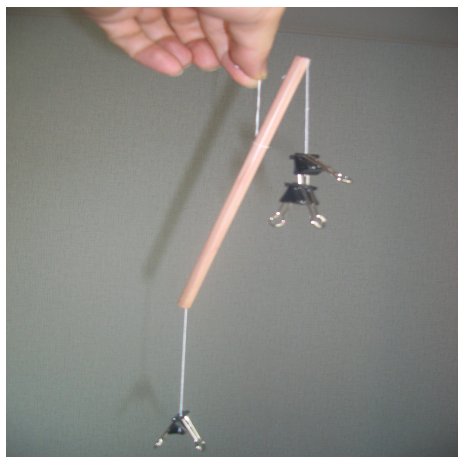
問題 1

長さ 17.6cm の鉛筆の両側に 1 個 3g のおもりを左に 1 個、右に 2 個つける。どこで、つり合うかつり合いの位置を求めよう。また、実際にそこでつり合うか確かめよう（図5）。



（図5）

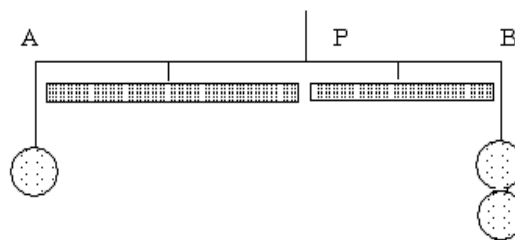
問題には、鉛筆の重さ (4g) が書いていないので、 $17.6 \times \frac{2}{3}$ より、左端から約 11.7cm のところがつり合う位置だと考えることが予想される。しかし、その考えをもとに実験を行うと（写真2）の結果になる。



（写真2）

そこで初めて鉛筆の重さに注目する。物理学で定義する重心を用いて鉛筆の重さを考慮すると、（図6）のように考えることができる。（図6）は、重さを考えなくても良い棒ABに、

おもりとつり合う点で2つに分けた鉛筆をそれぞれ吊したてこを考えている。



（図6）

ここで、鉛筆の長さを l 、重さを m 、左のおもりの重さを α 、右のおもりの重さを β とし、（図6）のように、A, B, Pをとる。鉛筆の重心は、物理学の定義より中点なので、 $AP = x$ とすると、てこの原理より

$$\begin{aligned} \alpha \times x + m \times \frac{x}{l} \times \frac{x}{2} \\ = \beta \times (l - x) + m \times \frac{l - x}{l} \times \frac{l - x}{2}, \end{aligned}$$

$$x = \frac{l(2\beta + m)}{2(\alpha + \beta + m)}$$

この式に先ほどの問題の値を代入すると、 $x = \frac{17.6(2 \times 6 + 4)}{2(3 + 6 + 4)}$ で約 10.8cm となる。

この値で吊ると水平につり合う（写真3）。



（写真3）

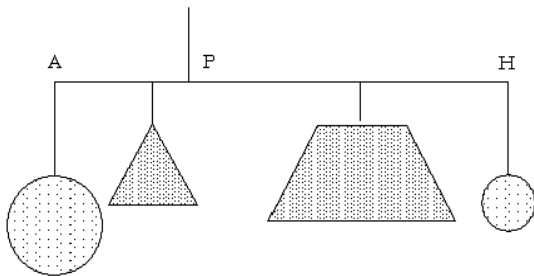
6.2. 正三角形の1つの頂点とその対辺におもりをつけたとき水平につり合う点の位置

最終的に実験するのは、三角形の各頂点におもりをつけたてこである。その前に次の問題を考える。

問題2

薄い板で作った、おもさ 20g, 1 辺が $12\sqrt{3}\text{cm}$ の正三角形ABCがある。頂点AとBCの中点を結び、交点をHとする。Aに 30g, Hに 10g のおもりをつけたとき、つり合う点をPとする。このときAPの長さを求めよ。

この問題を扱うことにしたのは、第6.1節の考え方と違う方法でつり合う点を考えさせたいからである。第6.1節の考え方をを用いると、上の問題を解くために、(図7)のように考えることになる。

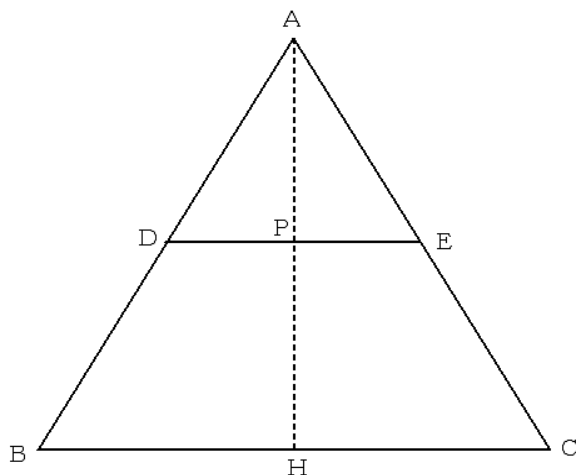


(図7)

この考え方で、AHの長さを l , 正三角形の重さを m , A, Bに吊したおもりの重さをそれぞれ $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ とすると、APの長さは次のように求めることができる。

A Pの求め方

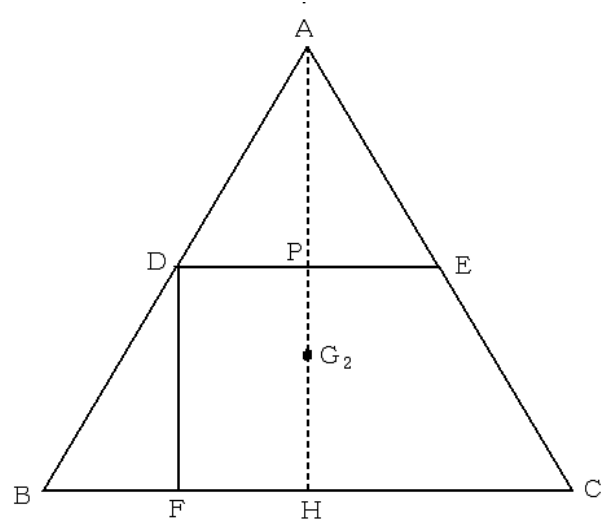
APの長さを x とする。点Pを通過ってBCに平行な線分DEを(図8)のようにとる。



(図8)

最初に、 $\triangle ADE$ の重心を G_1 とし、 PG_1 の長さと $\triangle ADE$ の重さを考える。 G_1 は三角形の重心より、 $PG_1 = \frac{1}{3}x$ である。 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ で、相似比 $x:l$ なので、面積比 $x^2:l^2$ となり、 $\triangle ADE$ の重さは、 $\frac{x^2}{l^2}m$ となる。

次に、等脚台形DECBの重心を G_2 とし、 PG_2 の長さと等脚台形DECBの重さを考える。(図9)のように補助線を引き、点Fをとる。



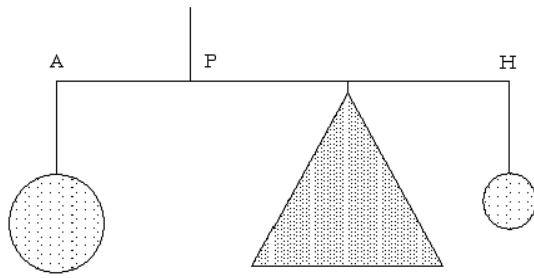
(図9)

$\angle ADP = \angle DBH = 60^\circ$ より、 $PD = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $BF = \frac{l-x}{\sqrt{3}}$ を得る。長方形PDFHの面積は、 $(l-x) \cdot \frac{x}{\sqrt{3}}$, $\triangle DBF$ の面積は、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{l-x}{\sqrt{3}} \cdot (l-x)$ である。よって、面積比は、

$$(l-x) \frac{x}{\sqrt{3}} : \frac{1}{2} \cdot \frac{l-x}{\sqrt{3}} (l-x) = 2x : (l-x)$$

長方形PDFHの重心を G_3 , $\triangle DBF$ の重心を G_4 とし、(図10)のような直線DEを x 軸、直線PHを y 軸、原点をPとする座標平面を考える。

これを用いると、問題2は(図12)のように考えて解くことができる。



(図12)

よって、問題2の解答は次のようになる。

(解答)

AH = 18で、三角形の重心はAHを2:1に内分する点である。よって、AP = x として、この原理より

$$30x = 20(12 - x) + 10(18 - x),$$

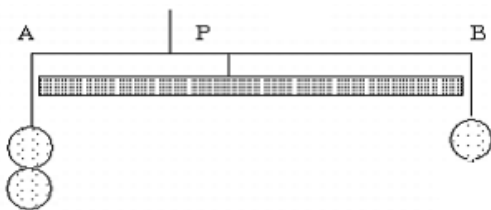
$$x = 7,$$

よって、APは7cmである。

6.3. 数直線、座標平面

この授業において、数直線、座標平面を学習する目的は、次の2つである。

1つ目は、内分点の座標が求められなければ、つり合う点の位置が求められないからである。しかし、数学II「図形と方程式」を学習していない生徒が多いことが予想されるため、数直線上と、座標平面上で内分点の求め方を学習することにした。

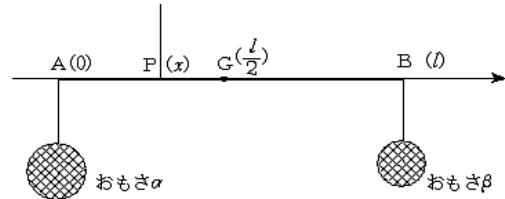


(図13)

2つ目は、式(7)を α, β によって場合わけせずにまとめるためである。座標を導入しなければ、(7)は $\alpha < \beta$ のときだけを考慮しているので、条件を $\alpha > \beta$ に変えると、(図13)より

$$\alpha \times x = m \times \left(\frac{l}{2} - x\right) + \beta \times (l - x) \quad (8)$$

と違った式を考えることになる。そこで(図14)のように棒状のてこを数直線上におく。



(図14)

つまり、A, B, G, Pの座標は、それぞれ0, l , $\frac{l}{2}$, x となる。0, l , $\frac{l}{2}$, x は座標なので、正や負の値をとることができるので、(7)と(8)を

$$\alpha \times x + \beta \times (x - l) + m \times \left(x - \frac{l}{2}\right) = 0,$$

つまり、

$$\alpha \times (0 - x) + \beta \times (l - x) + m \times \left(\frac{l}{2} - x\right) = 0 \quad (9)$$

のように1つの式にまとめることができる。この式(9)を用いることで第6.5節で示すような拡張が考えやすくなる。

6.4. ベクトル

考え方を直線(1次元)から平面(2次元)に拡張するためにベクトルを導入する。物理学ではベクトルを矢線ととらえ力学に結びつけている。一方、数学では矢線として考える場合と、多次元の量として考える場合がある。3次元から n 次元に拡張するためには、多次元の量として考えた方がよい。現在の高等学校の「数学B」で学習する単位「ベクトル」では、矢線として考え平面や空間の基本的図形と結びつけて学習を展開する。多次元の量としては「数学C」で学習する単位「行列」の中で、数の組としてのベクトルが紹介してある程度である。今回の授業実践では、つり合う点の位置を求めるためにベクトルを学習する。しかし、十分な時間が確保できないため、「数学B」のように矢線として導入し、それを演算法則にのせることができない。そこで今回は、ベクトルを2つの数の組とみなし、以下のように導入した。

定義 ベクトル

点Aの座標が (a_1, a_2) のとき、 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ とおいた $\vec{a}$ をベクトルという。特に、 $A(\vec{a})$ と表わしたとき、 $\vec{a}$ を点Aの位置ベクトルという。

定義 ベクトルの和・差・実数倍

$\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$, 実数 k のとき,
 $\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ をベクトルの和,

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ をベクトルの差,

$k\vec{a} = k(a_1, a_2) = (ka_1, ka_2)$

をベクトルの実数倍という。

定理 ベクトルの加法・実数倍

①交換法則 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

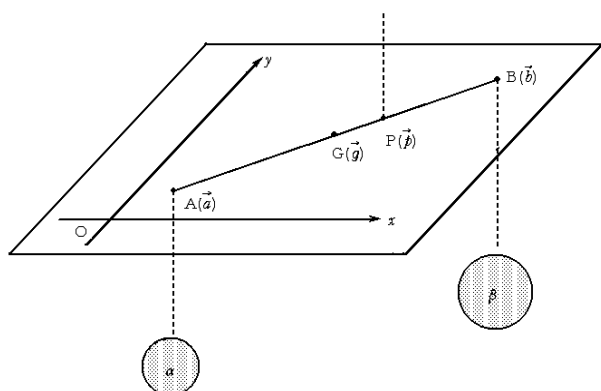
②結合法則 $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
 $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$ k, l は実数

③分配法則 $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
 k, l は実数

$k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
 k, l は実数

次にベクトルを用いて、棒状のてこのつり合いを考え、式(9)を数直線から平面上へ拡張する。てこを座標平面上に図15のようにおくと、式(9)から次式が成り立つことが予想できる。

$$\alpha(\vec{a} - \vec{p}) + \beta(\vec{b} - \vec{p}) + m(\vec{g} - \vec{p}) = \vec{0} \quad (10)$$



(図15)

(10)が成り立つことは、具体的な問題3で生徒に納得させることにする。

問題3

おもさ20gの棒ABがある。Aに50g, Bに10gのおもりをつけたとき、つり合う点をPとし、A, B, 棒の重心G, Pを座標平面上にとる。

①A(1, 1), B(17, 13)としたとき, ABの長さを求めよ。

②A(1, 1), B(17, 13)としたとき, Pの座標を(10)の式で求め, 実際につりあう点の座標か確かめよ。

①の解答

$$AB = \sqrt{(17-1)^2 + (13-1)^2} = 20$$

②の解答

(10)の式を変形すると,

$$\vec{p} = \frac{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + m\vec{g}}{\alpha + \beta + m} \quad (11)$$

従って, $\vec{a} = (1, 1), \vec{b} = (17, 13), \vec{g} = (9, 7), \alpha = 50, \beta = 10, m = 20$ を(11)に代入すると,

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{50(1, 1) + 10(17, 13) + 20(9, 7)}{50 + 10 + 20} \\ &= (5, 4) \end{aligned}$$

よって, P(5, 4)

次に, P(5, 4)が実際につり合う点であることを確かめる。①より $AB = 20$ であるから, $AP = x$ とすると, てこの原理より

$$\begin{aligned} 50x &= 20(10 - x) + 10(20 - x) \\ x &= 5 \end{aligned}$$

よって, $AP = 5$ である。

また, A(1, 1)とP(5, 4)の距離も

$$AP = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = 5$$

となるから, Pは実際につりあう点の座標である。

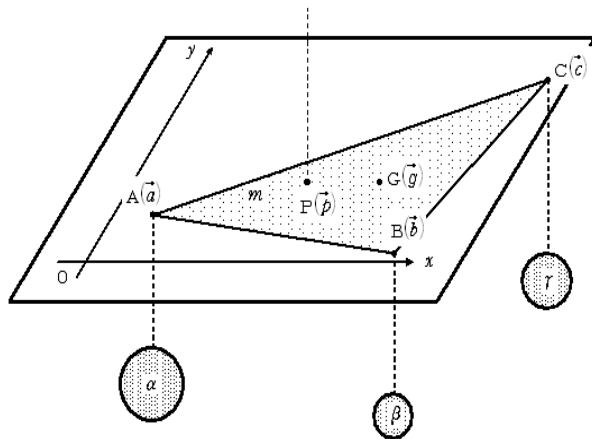
今回は, この問題3を解くことによって, 予想した(10)が正しいと結論付けることにした。

6.5. 三角形の各頂点におもりをつけたとき 水平につり合う点の位置

(10)をもとに、 $\triangle ABC$ の各頂点におもりをつけたときの水平につり合う点Pの位置ベクトルを、次の問題4で予想させる。

問題4

A, B, C, 三角形の重心G, Pを座標平面上にとり、それぞれの位置ベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{g}$, $\vec{p}$ とする(図16)。また、 $\triangle ABC$ の各頂点につけたおもりの重さを、それぞれ α , β , γ , 三角形の重さを m とする。このとき、つり合う点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。



(図16)

(10)が綺麗な型であるから、

$$\alpha(\vec{a} - \vec{p}) + \beta(\vec{b} - \vec{p}) + \gamma(\vec{c} - \vec{p}) + m(\vec{g} - \vec{p}) = \vec{0} \quad (12)$$
 という予想は立てやすいと考えた。この拡張は、あくまで予想であるが、この授業では、(1次元)から(2次元)へ拡張することの大切さを実感することと数学と物理学の重心を結びつけてもらうことに重きを置いているので、実験の結果で(12)が正しいことを確認することにし、それ以上の証明はしないことにした。

7. 授業実践について

(1) 授業のねらい

「重心」、「ベクトル」、「実験」、「ものづくり」をキーワードにした授業におけるねらい

は次の5つである。

- (A) 数学で定義する三角形の重心とつり合いの中にでてくる重心とを結びつけることができる。
- (B) 1次元で考えていたことを2次元に拡張して考えることができる素晴らしさが理解できる。
- (C) つりあう点の位置を2次元で考えることによりベクトルの有用性を実感することができる。
- (D) つり合う点を探すことを通して、計算で値を求めることの利便性が理解できる。
- (E) ものづくりの楽しさを知る。

(2) 実践方法

場 所 : 岐阜大学教育学部

日 程 : 平成19年8月4日, 5日の2日間

対象生徒: 中学校3年生~高校2年生

1日目(47人), 2日目(42人)

教材名「つり合う点を探そう」

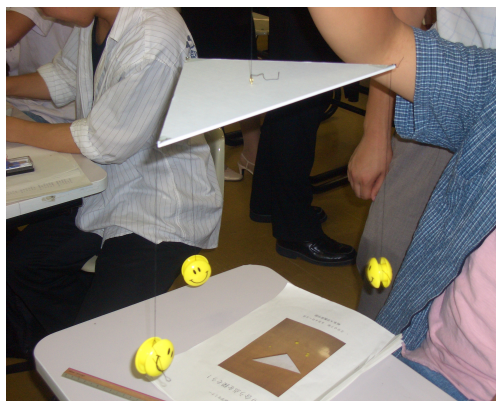
授業の流れ

第6節で述べた通りである。

(3) 授業の様子

ある生徒の感想に「1日目のはじめの方は、つまらなさそうでまじめに2日目サボろうかと思ったけど、けっこうおもしろくなってきて、続けることができた。楽しかったです。」と書いてあった。全体の様子も感想の通りであった。1日目の午前中に、鉛筆の両端におもりをつけたとき水平につりあう点の位置を計算で求め、その位置を実験で考察したり、正三角形の1つの頂点とその対辺の midpoint にそれぞれおもりをつけたとき水平につりあう点を計算で求めさせたときは、内容が理科的であったこともあり、何をすればいいか分からなかったり、計算が煩雑でできなかったりして、とても辛そうで重い雰囲気であった。しかし、三角形の各頂点におもりをつけたときの水平につり合う点を探す目標に向かって、午後から、座標平面を導入したり、数直線上で

棒状のてこの水平につり合う点を求める式を一般化し、さらに2日目にベクトルを導入して式を見やすくしていくに従って、生徒が興味を持ち始め、授業に積極的に参加し楽しむようになってきた。三角形のてこをつくり実験考察する段階にいたっては、多くの生徒に笑顔が見られとても充実している様子であった(写真4)。



(写真4)

8. アンケート結果と考察

8.1. アンケート結果

授業後に選択式の問いと記述式の感想の混じったアンケートを行った。記述式の回答は全て挙げる事ができないので第8.2節の考察で主なものだけを紹介する。ここでは、まず選択式の問いの結果を示す。回収数は、41である。尚、百分率の数値は小数第2位を四捨五入してある。

ものづくりについて

今回の高校セミナーでは「三角形の各頂点におもりをつけたてこ」をつくりました。

(Q1) つくることは楽しかったですか？

楽しかった	58.5 %
どちらかといえば楽しかった	36.6 %
ふつう	4.9 %
どちらかといえば楽しくなかった	0.0 %
楽しくなかった	0.0 %

(Q2) てこをつくることを通して、数学のよさや便利さを感じましたか？

感じた	58.5 %
どちらかといえば感じた	34.1 %
どちらかといえば感じなかった	2.4 %
感じなかった	2.4 %
どちらとも言えない	2.4 %

(Q3) ものをつくることは教科書で学ぶ以上に多くの知識を得ると思いますか？

思う	58.5 %
どちらかといえば思う	36.6 %
どちらかといえば思わない	2.4 %
思わない	0.0 %
どちらとも言えない	2.4 %

重心について

(Q4) 高校数学セミナーを受講する以前に三角形の重心(数学)を知っていましたか？

知っていた	46.3 %
名前だけ聞いたことがあった	26.8 %
まったく知らなかった	26.8 %

(Q5) 高校数学セミナーを受講する以前につりあいの中にでてくる重心(理科)を知っていましたか？

知っていた	31.7 %
名前だけ聞いたことがあった	22.0 %
まったく知らなかった	46.3 %

(Q6) 授業を受けて、数学で約束している三角形の重心とつりあいの中にでてくる重心(理科)が結びつきましたか？

結びついた	36.6 %
なんとなく結びついた気がする	53.7 %
結びついた気がしない	2.4 %
結びつかない	0.0 %
わからない	7.3 %

(Q7) 授業を終えて重心に興味をもてましたか？

もてた	46.3 %
どちらかというともてた	41.5 %
どちらかというともてなかった	4.9 %
もてなかった	0.0 %
どちらともいえない	7.3 %

教材について

(Q8) 棒のてこでは直線上(1次元)で考えましたが、三角形のてこでは平面上(2次元)で考えました。このように、いままで考えている世界とは違う世界でものごとを考えることは

とても興味・関心がわく	36.6 %
どちらかといえば興味・関心がわく	61.0 %
どちらかといえば興味・関心がわかない	0.0 %
興味・関心がわかない	2.4 %

(Q 9) 三角形のてこ (2次元) で水平につり合う点を探すのに計算の必要性を感じましたか？

強く感じた	68.3 %
どちらかといえば感じた	22.0 %
どちらかといえば感じなかった	7.3 %
感じなかった	0.0 %
どちらともいえない	2.4 %

(Q 10) 今回は、棒の重さや三角形の重さを考えるなど実際の条件で水平につり合う点を求め、実際に実験で確かめました。このように実際の条件で値を求めることは

興味をもてた	48.8 %
どちらかというに興味をもてた	43.9 %
ふつう	7.3 %
どちらかというに興味をもてなかった	0.0 %
興味をもてなかった	0.0 %

ベクトルについて

(Q 11) 数学Bのベクトルをすでに学習していますか？

学習済みである	19.5 %
現在学習している	9.8 %
まだ学習していない	70.7 %

(Q 12) 直線上から平面上に拡張するときベクトルが登場しましたが、ベクトルに興味・関心が沸きましたか？

沸いた	29.3 %
どちらかというに沸いた	56.1 %
どちらかというに沸かなかった	2.4 %
沸かなかった	2.4 %
どちらともいえない	9.8 %

(Q 13) 授業でベクトルの有用性を感じることが出来ましたか？

できた	19.5 %
できた気がする	19.5 %
できなかったような気がする	17.1 %
できなかった	12.2 %
どちらともいえない	31.7 %

授業について

(Q 14) 授業の内容は理解できましたか？

できた	36.6 %
だいたいできた	56.1 %
あまりできなかった	7.3 %
まったくできなかった	0.0 %

(Q 15) 考える時間は十分でしたか？

多い	4.9 %
少し多い	12.2 %
ちょうど良い	78.0 %
少し少ない	4.9 %
少ない	0.0 %

今回は、つり合う点を求めるために必要なことを学習しました。このように1つの目的に向かって学習を進めていく授業は

(Q 16)

学習する内容に強く興味・関心もてる	48.8 %
どちらかというに学習する内容に興味・関心もてる	43.9 %
とくに作品を制作するから学習する内容に興味・関心をもつということはない	4.9 %
どちらかというに学習する内容に興味・関心もてない	2.4 %
学習する内容に興味・関心もてない	0.0 %

(Q 17)

とても楽しい	41.5 %
どちらかというに楽しい	46.3 %
ふつう	12.2 %
どちらかというに楽しくない	0.0 %
楽しくない	0.0 %

8.2. 考察

授業展開については、「三角形のつり合う点を見つけ、実際に三角形のてこをつくって実験で考察し、正しいかどうか確かめることを目標としていたので、それまでの学習がすごく楽しかったし、理解しようと、いつもよりやる気になったのがよかった。」というような感想が多くみられたことから成功したと考えられる。では、生徒の興味・関心を喚起することはできたが、それが授業のねらいにどう結びついたかアンケート結果をもとに考察する。

(1) 授業のねらい (A) について

「授業を受けて、数学で約束している三角形の重心とつり合いの中のでてくる重心 (理科) が結びつきましたか？」という質問に対

して、約 37 % の生徒が結びついたと回答し、結びついた気がするを合わせると約 90 % になる (Q 6)。また、授業を終えて、重心について興味関心を持った生徒が、どちらかというともてたを合わせると約 88 % になる (Q 7)。このことは、重心を実験を通して、数学と物理学の両面から考察できた結果だと考えられる。よって、このねらいは達成できたと考える。

(2) 授業のねらい (B) について

「直線上 (1 次元) で考えたことを、平面上 (2 次元) で考えました。このように、いままで考えている世界とは違う世界でものごとを考えることは興味・関心がわきますか？」という質問に対して、全体で約 98 % の生徒がわく、どちらかというわくと回答した (Q 8)。この結果は、拡張して考えることができる素晴らしい多くの生徒に理解できたからだと考えられる。よって、このねらいは達成できたと考えられる。

(3) 授業のねらい (C) について

「ベクトルを使った式にすると簡単になり、わかりやすい。」などベクトルの有用性を実感できたという感想も何人か見られた。しかし、全体としては、「授業でベクトルの有用性を感じることが出来ましたか？」という質問に対して、できた、できた気がするを合わせて約 39 %、できなかった、できなかった気がするを合わせて約 29 %、どちらともいえないが約 32 % と期待した結果が得られなかった (Q 13)。これは、ベクトルを学校でまだ学習していない生徒 (約 71 %) が多かったことが原因の 1 つに考えられる。ベクトルを学習済みの生徒 (約 20 %) に限っては、できた、できた気がするを合わせて約 63 % であった。また、(12) の式が綺麗で、予想がスムーズにいきすぎたことも原因の 1 つかもしれない。

(4) 授業のねらい (D) について

「三角形のてこ (2 次元) で水平につり合う点を探すのに計算の必要性を感じましたか？」

という質問に対して、全体で約 68 % の生徒が強く感じたという回答し、どちらかといえば感じたという回答した生徒を合わせると約 90 % になる (Q 9)。また、「つり合う点を計算でぴったり求められたので嬉しかったです。」「数学で計算した結果はなかなか正確だとわかった。」「数学の便利さを感じることができました。」という感想からも達成できたと考える。

(5) 授業のねらい (E) について

「作ることは楽しかったですか？」という質問に対して、約 59 % の生徒が楽しかったと回答し、どちらかといえば楽しかったを合わせると約 95 % になる (Q 1)。また、実験用のてこをつくるときの生き生きとした活動的な様子から達成できたと考える。

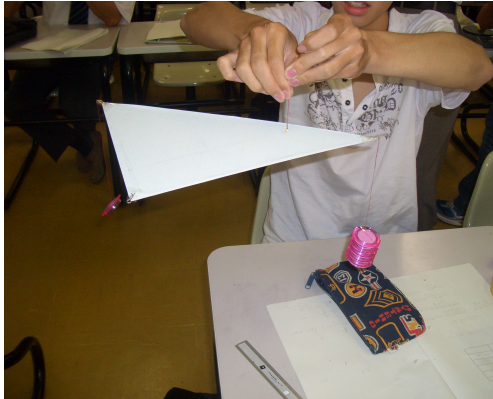
9. 今後の課題

今回の授業は、物理学の重心と数学の重心を実験しながら考えることによって、予想以上に数学の有用性を生徒に実感させることができた。このことは、日々の授業の大切さや、数学の素晴らしさを再確認する効果がある。そこで、物理学と関連した教材の開発を今後も行っていきたい。しかし、今回のような授業を行う時間的余裕があまり無いのが現実である。そこで、限られた時間の中で、授業を行う機会 (今回のように理科の要素を含んだ教材であれば、総合学習の時間も候補に挙げられる) をどのように設けるか、またどのように設けると効果的かの研究もあわせて行っていきたい。

また、ベクトルの有用性を伝える教材のつもりであったが、予想より効果があがらなかった。全員がベクトルを学習済みであるクラスで行ったらどうなるのかを比較研究することも今後の課題である。

さらに、今回は時間の関係で三角形の各頂点におもりをつけたてこをつくり、実験を考察して正しいか確認して終了としたが、実験考察が早く終わった生徒の中には、おもりを

一箇所や二箇所だけにつけた三角形の重心の位置を発展的に考え、実際にてこをつくり、考察している生徒もいた(写真5)。そこで、今回の授業をさらに発展させ、各自でおもりをつける場所を変えたてこや、多角形のてこなどオリジナルなてこ(文末 資料3)のつり合う位置を考えさせ、実験で考察する時間を設け、意見を交流できるような時間を設けた長期的教材の開発にも挑戦していきたい。



(写真5)

引用文献

- [1] 大島利雄ほか14名, 2003, 数学B, 数研出版.
- [2] 川中宣明ほか14名, 2003, 数学II, 数研出版.
- [3] 加藤順二ほか14名, 2004, 数学III, 数研出版.
- [4] 長尾 汎 ほか9名, 2000, 改訂版 高等学校 数学A, 数研出版.
- [5] 斉藤晴男・兵藤申一ほか12名, 1997, 高等学校物理I B改訂版, 啓林館.
- [6] 三浦登・奥井智久ほか29名, 2002, 新しい理科5下, 東京書籍.
- [7] 岩崎美奈・愛木豊彦, 2004, 数理的考察のよさを味わう教材の提案, てこを用いた授業実践報告II, 岐阜数学教育研究, Vol.3, 18-24.

資料1

ものづくりに関するアンケート結果

(小数第2位を四捨五入)

対象：岐阜県立長良高等学校の1年生 117人

日時：平成19年6月

「いままでにプラモデルをつくったことがありますか？
(お菓子のおまけは除く)」

ある	42.7 %
ない	57.3 %

表1

「いままでに文化祭でものをつくったことがありますか？」

ある	12.0 %
ない	88.0 %

表2

「いままでにものをつくった経験は」

豊富だと思う	6.8 %
豊富なほうだと思う	14.5 %
ふつうだと思う	53.8 %
乏しいほうだと思う	17.1 %
乏しいと思う	7.7 %

表3

「ものをつくることに興味・関心がありますか？」

ある	19.7 %
どちらかといえばある	26.5 %
ふつう	36.8 %
どちらかといえはない	13.7 %
ない	3.4 %

表4

「ものをつくることを楽しいと思いますか？」

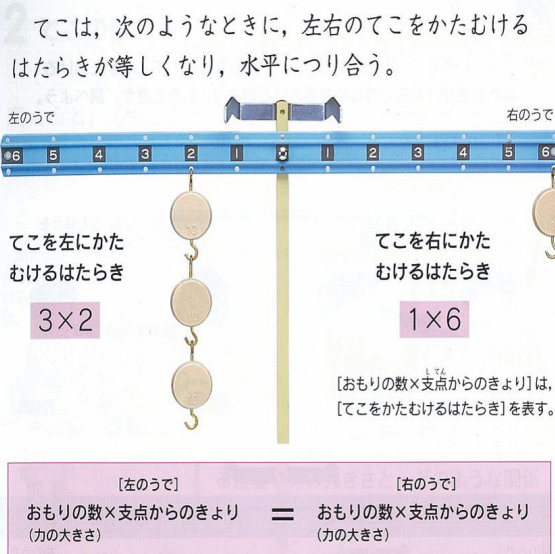
思う	27.4 %
どちらかといえば思う	31.6 %
ふつう	31.6 %
どちらかというと思わない	4.3 %
思わない	5.1 %

表5

資料2

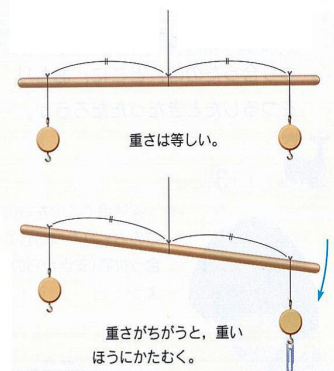
てこの原理

てこの原理に関しては、小学校5年[6]で次のように学習している。

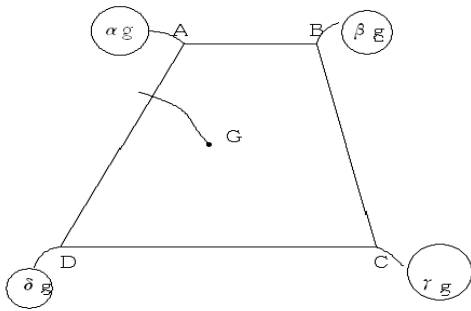


実験用てこのように水平にささえられたぼうの、^{しん}支点から左右同じきよりの位置に、同じ重さのものをつるすと、水平につり合う。

このきまりを利用して、ものの重さをくらべたり、はかたりすることができる道具を、**てんびん**という。



資料3 凸四角形のでこ



おもさ mg の四角形 $ABCD$ がある。A に αg , B に βg , C に γg , D に δg のおもりをつけたとき, つり合う点を G とする。 G の位置を求めよ。

(解答)

A, B, C, D の位置ベクトルを $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ とする。

A, C を結ぶ補助線を引き, $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ の重心を G_1, G_2 , 位置ベクトルを $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ とすると

$$\vec{g}_1 = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}, \vec{g}_2 = \frac{\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

$\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ のおもさを lg, ng とすると

$$\vec{g} = \frac{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + \delta \vec{d} + l \vec{g}_1 + n \vec{g}_2}{\alpha + \beta + \gamma + \delta + l + n}$$

ここで, 今回の教材のように座標を用いて G の座標を求めるか, 以下のように変形して比で求めることもできる。

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \frac{\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} + \delta \vec{d} + l \times \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} + n \times \frac{\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}}{3}}{\alpha + \beta + \gamma + \delta + l + n} \\ &= \frac{(3\alpha + l + n) \vec{a} + (3\beta + l) \vec{b} + (3\gamma + l + n) \vec{c} + (3\delta + n) \vec{d}}{3(\alpha + \beta + \gamma + \delta + l + n)} \\ &= \frac{(3\alpha + 3\beta + 2l + n) \frac{(3\alpha + l + n) \vec{a} + (3\beta + l) \vec{b}}{(3\alpha + l + n) + (3\beta + l)}}{3(\alpha + \beta + \gamma + \delta + l + n)} \\ &\quad + \frac{(3\gamma + 3\delta + l + 2n) \frac{(3\gamma + l + n) \vec{c} + (3\delta + n) \vec{d}}{(3\gamma + l + n) + (3\delta + n)}}{3(\alpha + \beta + \gamma + \delta + l + n)} \end{aligned}$$

線分 AB を $(3\beta + l) : (3\alpha + l + n)$ に内分する点を P , 位置ベクトルを $\vec{p}$,

線分 CD を $(3\delta + n) : (3\gamma + l + n)$ に内分する点を Q , 位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると

$$\vec{p} = \frac{(3\alpha + l + n) \vec{a} + (3\beta + l) \vec{b}}{(3\alpha + l + n) + (3\beta + l)}, \vec{q} = \frac{(3\gamma + l + n) \vec{c} + (3\delta + n) \vec{d}}{(3\gamma + l + n) + (3\delta + n)}$$

よって,

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \frac{(3\alpha + 3\beta + 2l + n)\vec{p} + (3\gamma + 3\delta + l + 2n)\vec{q}}{3(\alpha + \beta + \gamma + \delta + l + n)} \\ &= \frac{(3\alpha + 3\beta + 2l + n)\vec{p} + (3\gamma + 3\delta + l + 2n)\vec{q}}{(3\gamma + 3\delta + l + 2n) + (3\alpha + 3\beta + 2l + n)}\end{aligned}$$

よって, Gは線分PQを $(3\gamma + 3\delta + l + 2n) : (3\alpha + 3\beta + 2l + n)$ に内分する点である。

$$\text{ただし, } l = \frac{AB}{AB + CD}m, \quad n = \frac{CD}{AB + CD}m$$