岐阜数学教育研究
2006, Vol.5, 60-71

スーパーサイエンスハイスクール講座「油分け算 (和算)」実践報告

牧村修[1]，山田雅博[2]，菱川洋介[1]，松井真也[3]

算数 · 数学は，一般的に，与えられた式から答えを導くという計算が重視された学問であると認識されている。しかし，実際の数学の研究においては，自分で問題を見つけ，様々な方向から試行錯誤を繰り返して全体像を少しずつ明らかにしていく，という過程が中心となる。また，これらの過程に最も必要とされる能力は，数学的に見る力と考える力である。そこで，スーパーサイエンスハイスクールに指定された高等学校において，数学的な見方・考え方を養う教材として，日本古来の数学である和算，その中の一つである油分け算を用い授業実践を行った。本論文は，その結果報告と，そこから得られた考察である。

＜キーワード＞ スーパーサイエンスハイスクール，数学的な見方・考え方，和算，油分け算

1. はじめに

生徒の「科学技術離れ」,「理科離れ」が起きていると指摘され，このような現状に対処するために，文部科学省は，科学好き・理科好きな生徒を増やす方策として，平成14年度から「科学技術・理科大好きプラン」を開始した。スーパーサイエンスハイスクール (以下，SSH と書く。) はその中の事業の 1 つとして，同年度から開始されたものである。その内容・目的は，科学技術・理科・数学教育を重点的に行う高校を SSH として指定し，理科・数学の研究を推進させることである。

この SSH に指定された高校において,「科学技術離れ」,「理科離れ」を減らすという目的のために，次の 2 つのことに着目した。

(i) 授業形態

高等学校においては学習内容の多さや大学入試の存在によって，自主的に問題解決に向かう場面を設定しづらい。時間的な問題もあり，教える側が問題を与え，その問題の解法を与えることが多い。このことによって，自らのアイディアを活用し，問題を解決していく，という数学の魅力や研究の実際を伝える機会を作れない状況にある。つまり，現在の授業形態では，数学や研究について触れることが少ないので，このことが数学離れに拍車をかけているのではないかと考えた。

この原因に対処するために，本授業実践では，生徒が自ら問題を発見し，解決し，それをまとめ，発表するという実際の研究に近い形態での授業を行うことにした。

(ii) 数学的な見方・考え方

数学にとって，抽象化や一般化の見方，帰納的な考え方，演繹的な考え方などの数学的な見方·考え方は，教科の内容を支えるものであり，新たな概念を構築していく際に重要となるものである。また，数学という教科の枠にとらわれず，このような見方·考え方は広く日常生活においても事象を考察したり，問題を解決する際に重要かつ役立つものである。

これらのことから，本授業実践の目的を，数学の研究過程を体験し，数学を研究する苦

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学大学院教育学部
[3]岐阜県立岐山高等学校

労や楽しさなどを知ることを通して，数学的な見方・考え方の力を高めることとした。

2. 本教材を選んだ理由

本授業実践は 1 コマ 2 時間を計 10 回という長い時間を使った実践であった。教材を選ぶにあたり，第 1 節で着目した (i)，(ii) を十分に体現でき，長期間での研究に耐えられる深みを持つものを探した。その中で，山路 [1]「和算を用いた総合的な学習における教材の一提案」を読み，論文中で提示された教材の一つである「油分け算」が適当ではないかと考えた。そこでさらに調べてみると，山路 [1] 以外にも，山路 [2] と嶋田 [3] で実践されていることがわかった。それらから，油分け算は第 1 節で着目した (i)，(ii) を十分に体現できる深い内容を持っていることが伺えた。

3 つの論文の簡単な実践記録とそれに対する考察を次に書く。

山路 [1]，[2] では，小学校高学年と高校生対象に，嶋田 [3] では，小学校高学年を対象に油分け算の授業実践が行われた。小学生対象に行なったものは，実験をし，操作して調べるという授業を行い，算数の有用性を認識させるに留まった。これは，30 名程度に対する，1 時間 1 コマまたは 2 コマの実践であったことを考慮すれば，少なくはない教育的効果があったと考えられる。高校生対象に行なったものは，残念ながら 3 時間 1 コマで実践を行なったと記録にはあるが，授業案，考察や結果が残っていないため，詳しいことはわからない。

以上 3 つの実践研究から，油分け算は，深い内容があるが，短い時間での授業実践でしか用いられておらず，研究過程を体感させるには至っていないことがわかった。ゆえに，高校生対象に，長期間での実践を試みたいと考え，本実践で用いることにした。

3. 教材研究－油分け算－

和算とは，江戸時代から明治時代初期にかけて日本で独自に発展した数学である。和算は，吉田光由が「塵劫記」（[4] 参照）を執筆したところから始まったといわれる。「塵劫記」は数の桁の名称や単位，掛け算などの基礎的な知識のほか，面積の求め方などの算術を日常生活に身近な話題をもとに解説されたものや，遊戯的な問題が載せられており，庶民の間に数学が広がるひとつのきっかけとなった。そのため，その内容は今日まで伝わるものが少なくない。油分け算は，この「塵劫記」の中にある記述の 1 つで，次のようなものである（[4]）。

> 油はかり分ける事
> <u>斗桶に油一斗あるを，七升枡と三升枡と二つある。これにて，五升ずつに分けたいと</u>いふ時，まづ，三升の枡にて七升枡へ，三は入れ申し候時，三升枡に二升残り申し候時，七升枡にあるを，もとの斗桶へあけて，三升枡に二升あるを，また七升枡へあけて，また三升枡にて一はい入るれば，五升づつに分かるなり。

下線部が問題であり，それ以下が解答である。また，斗・升とは日本古来の度量衡法である尺貫法の体積の単位であり，他にも合 (ごう) という単位がある。それぞれの関係は「1 斗 ＝ 10 升 ＝ 100 合」となっている。

油分け算は,「油に満たされた 1 斗 (=10 升) の容器」,「7 升の空の容器」と「3 升の空の容器」を用いて，1 斗の油を二等分する問題である。これを現代風に言い換えれば，

> 桶に 10ℓ の水が入っている。7ℓ 入る容器と 3ℓ 入る容器がある。この 2 つの容器を使って，10ℓ の水を 5ℓ と 5ℓ に分けたい。どうしたらよいか。

という問題になる。この油分け算について考えるといくつか疑問が浮かぶ。

(1) どんな操作で分けることにするのか。
(2) 無駄のない手順は何か。
(3) 5ℓ 以外にはどんな量に分けられるのか。
(4) 容器の大きさが変わるとどうなるか。
などである。次に,

$X\ell$ の水が入った桶がある。$a\ell$ 入る容器 A と $b\ell$ 入る容器 B がある。この 2 つの容器を使って，どのような量が作れるか。ただし，$a > b$ とする。また,「容器 A に入っている水の量」,「容器 B に入っている水の量」,「二つの容器の合計」を作られる量と定義する。

と，条件を一般化して問題を設定する。このとき，(1)〜(4) について考える。

まず，(1)，(2) について述べる。操作の過程で,「1 回目に容器 A に $a\ell$ の水を入れて，2 回目に容器 A から桶に水をすべて戻す。」とした場合，A と B に水が入っていない状態に戻っている。このように，同じ状態が何度も発生した場合は無駄な操作があるといえる。そこで，無駄のない手順を,「操作の過程が重複することなく，作ることが可能な全ての量を作る手順」と定義する。(図 1) ここで,

① 容器 A が空であれば，桶から A がいっぱいになるように水を入れる。この操作を 汲む と呼ぶことにする。
② 容器 A に水が入っており，容器 B に余裕があるとき，A から B に水を入れる。この操作を 移す と呼ぶことにする。
③ 容器 B がいっぱいになったとき，B から桶に水を全て入れる。この操作を 戻す と呼ぶことにする。

と①〜③のように操作のルールを設定すれば，無駄のない手順になる。もし，手順の途中に「容器 A から水を戻す」，容器 B に水を入れる,「いっぱいになっていない容器の水を桶に入れる」など，①〜③以外の操作をした場合は，同じ状態が 2 度でてきてしまうことが容易に確認でき，無駄ができてしまう。

このルールが無駄のない手順（重複しない手順）であることは，授業 8 時限目で生徒自身によっても確認することができた。その証明方法は，第 5.2 節 (8 時限目) で簡単に述べる。

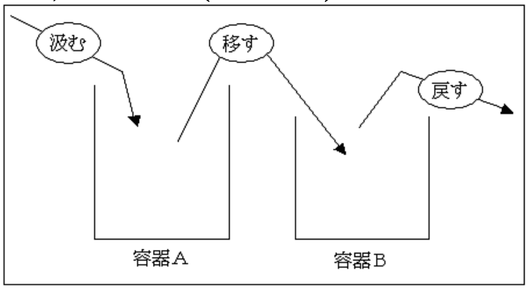

図 1

(3)，(4) に関して，a と b が互いに素であれば，$a+b$ 以下の自然数が全て作れる。また，a と b が互いに素ではないとき，a と b の最大公約数 n に対して，$a+b$ 以下かつ，n の倍数である自然数を全て作ることができる。

A と B の両方に水が入っていない状態から，①〜③のルールに従って操作を繰り返すと，両方に水が入っていない状態に戻る。これを「リセット」と呼ぶ。1 つの例として次の表 1 を挙げる。容器 A(3ℓ) と容器 B(5ℓ) のときは，15 回目の操作でリセットが起きていることがわかる。

操作の回数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
容器 A(3ℓ)	0	3	0	3	1	1	0	3	0	3	2	2	0	3	0	0
容器 B(5ℓ)	0	0	3	3	5	0	1	1	4	4	5	0	2	2	5	0
操作の種類	×	①	②	①	②	③	②	①	②	①	②	③	②	①	②	③

表 1

リセットするまでにかかる操作の回数は，a と b が互いに素であれば，$2(a+b)-1$ 回である。また，a と b が互いに素ではないときは，a と b の約数 n が存在して，$2(a+b)/n-1$ 回である。これは操作①，②，③の回数を調べれば見つかる。このとき次の

ようにパターンを把握すれば考えやすい。

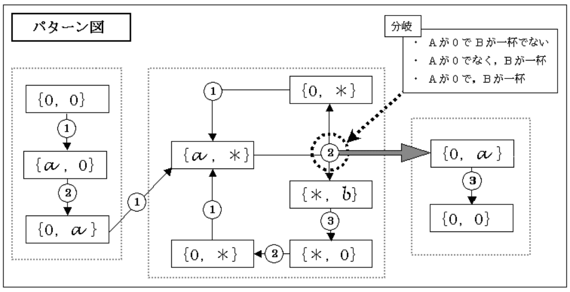

図 2

図 2 のように，$\{A$ の容量$, B$ の容量 $\} = \{a, b\}$（以下，$\{a, b\}$ と書く。）と書いたとき，容器 A と容器 B に入っている水の量を表すことにする。

ルール①〜③は，その定義から操作の順番が決定することにより，図 2 のように表現できる。ここで，図 2 の操作の過程だけに着目してみると，

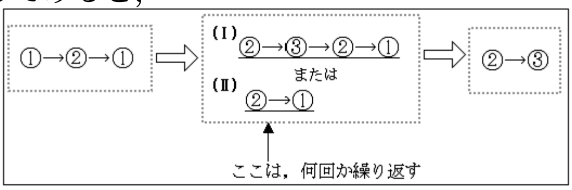

図 3

のように，表される。

a と b を互いに素として，①を p 回，③を q 回行なったとすれば，リセットされたとき汲んだ水の量と捨てた水の量は一致するので，$ap = bq$ である。ゆえに，$a = q$，$b = p$ とわかる。つまり，①は b 回，③は a 回行なわれたことがわかる。

①と③の回数がわかったので，図 3 から，次のように②の回数が求められる。まず，③の回数に注目して，(I)「②→③→②→①」を見ると，この操作の間に③は $a-1$ 回行なわれていることがわかる。その回数と比較すれば，(I) の間に①が $a-1$ 回，②が $2(a-1)$ 回行なわれていることがわかる。

次に，(II)「②→①」において，①の回数は，$b - \bigl(1 + 1 + (a-1)\bigr)$ とわかる。(II) の間に行なわれた②の回数も同じなので $b - a - 1$ とわかる。

(I) と (II) の②の回数とそれ以外の 2 回を足せば，全体の②の回数 $a + b - 1$ がわかる。①，②，③の回数がわかったので，全てを足せば，$2(a+b) - 1$ となる。

また，次のように操作のルールの定義を変えても，無駄のない手順であり，リセットが起きる回数も一致する。

> ①’ 容器 B が空であれば，桶から B がいっぱいになるように水を入れる。
> ②’ 容器 B に水が入っており，容器 A に余裕があるとき，B から A に水を入れる。
> ③’ 容器 A がいっぱいになったとき，A から桶に水を全て入れる。

ルール①〜③の容器 A と容器 B の記述を入れ替えたものである。ただし，容器 A と B の容量の関係 $a > b$ は，変えていない。つまり，①〜③は容量の大きい容器 A で水を汲むルールであったが，①’〜③’ は容量の小さい容器 B で水を汲むルールであることがわかる。

また，ルール①〜③と，①’〜③’ を比較してみると，ビデオの逆再生をしたかのような，完全に真逆の操作であることがわかる。このことより，「ある量 $x\ell$ を最も効率よく作る」には，リセットの回数を調べ，①〜③の表を順に書いていき，表に $x\ell$ が作られたときに，「$a+b\bigl(($リセットの回数$-1)-1\bigr)$」との大小関係を調べることによって，どちらのルールを選択すれば，効率よく作ることができるのかがわかる（$x\ell$ を作ることができた回数が $a+b$ より小さいならば，①〜③が効率のよいルールで，$a+b$ より大きいならば，①’〜③’ が効率のよいルール）。

現段階において我々の研究では，効率のよいルールを調べるために，表を書くという面倒な作業をしなければいけない。この作業をせず，2 つの容器の容量から簡単にルールを選ぶ方法や，ある量が作られる回数が簡単にわかる方法については，今後の検討課題である。

4. 授業を通してのねらい －研究とは－

今回の授業実践において「数学の研究を体感し，数学的な見方・考え方を養う」ことを主な目的とした。この**数学の研究**を説明するために次の図４を用いる。

1 ○問題・疑問の発見
⇓
○数学的に取り扱い可能な定義の設定

⇓ ⇑

2
○疑問に関する解 (定理・命題) の発見
○解に関連したこと (系・補題) の発見
⇓
2’ ○ **2** で得た結果を具体例に適用

図４

上図のように，研究は $\boxed{\mathbf{1}}$ と $\boxed{\mathbf{2}}$ または $\boxed{\mathbf{2'}}$ を繰り返して，内容を深めていくものである。これを「試行錯誤」と呼ぶことにする。

また，研究はお互いの情報交換による相互作用から，内容が一気に深まることも少なくない。ゆえに，発見した内容を他の人と交流することも必要であり，これもまた数学の研究の一環である。これを「発信・交流」と呼ぶことにする。

もちろん生徒達が普段行なっている「過去の文献や結果を調べ，考察し，自分の力にしていく」という「学習」も重要ではある。実際，学問の研究は人の歴史と共に積み重ね続けられて様々な結果が得られている（また，得られ続けている）。これを上手に利用していくこともまた，研究の一つである。

今回生徒達には，普段の受動的な学習以外の自主的な研究のスタイルを体験してもらいたいと考えた。そのために，今回の実践は教師側の補助は少なめにし，生徒達の自主的な活動に任せた。このことが効果的であったかどうかの考察は後で述べる。*1

「数学の研究」と仰々しく定義したが，この考え方は数学の研究だけでなく，日常生活で普通に行なわれる活動でもある。

5. 実践の計画と実際

5.1. 授業の計画と方針

実施日： 平成 18 年 5 月～12 月，
1 時限 2 時間を計 10 回
場　所： 岐阜県立岐山高等学校
参加者： 1 年生 3 名，2 年生 2 名*
＊:参加者は数学研究部というクラブに所属

全 10 時限を，

時限数	生徒の活動	教師の活動
1	問題に対する追求，疑問・課題の発見	問題提起，油分け算の定義
2	研究，本時のまとめ	研究とまとめの補助，まとめ方の説明
3,4	研究，本時のまとめ，中間発表の準備	研究とまとめの補助
5	中間発表	中間発表の準備
6～9	研究，本時のまとめ，最終発表の準備	研究とまとめの補助
10	最終発表	最終発表の準備

このように設定した。研究と本時のまとめを同時に行うということで，1 コマ 2 時間の前半 1 時間半を研究，後半 30 分を本時のまとめの時間として分けることにした。ただし，生徒が研究を続けたいのであれば，まとめの時間に研究をしてもよいことにした。教師の補助は，生徒と研究内容を話し合い，生徒の研究の真偽の確認や，方針についての相談など，軽い助言の範囲で補助を行うことにした。そうすることによって，自主的に研究する姿勢を身につけてもらいたいと考えた。

また，まとめについては，実際の研究の形態に近づける目的で，数式を含む理科系の出版

物・論文などで用いられるは標準的なフォーマットである $\LaTeX\,2_\varepsilon$(ラテフ) を使うことにした。

$\LaTeX\,2_\varepsilon$ とは，マークアップ言語処理系 (この処理スタイルで一般的なものを挙げれば html がある。) の 1 つである。もう少し詳しく書けば，文章そのものと，文章の構造を指定する命令が混在して記述されたテキストファイル (html で言えば，ソース) を読み込み，そこに書かれた命令に従って文章を組版して (html では，テキストファイルそのままで見ることができるため，この変換操作は存在しない。)，組版結果を DVI 形式のファイル (DVI は html でいうブラウザのようなもの) に書き出すことによって，数式等を綺麗に表示できるものである（[5]）。

5.2. 実際の授業展開

生徒の予定などもあり, それに合わせて第 5.1 節で示した計画とは少し違う授業展開となった。

時限数	生徒の活動	教師の活動
1	問題に対する追求，疑問・課題の発見	問題提起，油分け算の定義
2	研究，本時のまとめ	研究とまとめの補助，まとめ方の説明
3,4	研究，まとめ，中間発表の準備	研究とまとめの補助
5	リセットについて考えがまとまる	操作の流れを前で説明
6,7	外部での発表の準備 (+研究)	発表内容の確認
8,9	研究，最終発表の準備	研究の補助，発表内容の確認
10	最終発表	最終発表の準備

5.2.1. 1 時限目

導入は，第 3 節に則った形で行なった。詳しくは以下の通りである。

まず始めに，次の問題を出し，青い色のパネルと小さな桶と大小のコップ 2 個（半具体物・図 5）を与えて取り組ませた。

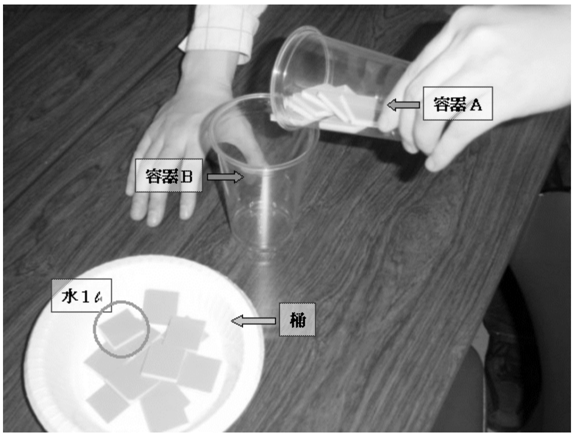

図 5

桶に 8ℓ の水が入っている。3ℓ 入る容器と 5ℓ 入る容器がある。この 2 つの容器を使って，4ℓ を作りたい。どうすればよいか。

この問題に対して，多少の個人差はあったが，生徒達はすぐに 4ℓ を作ることができた。

次に，以下のように最短手順となる操作を与え，油分けの定義とした。

$X\ell$ の水が入った桶がある。また，$a\ell$ 入る容器 A と $b\ell$ 入る容器 B がある（ただし，$a > b$）。このとき，次の①〜③の操作のルールを油分けと呼ぶ。

①： A の容器が空であれば，桶から A がいっぱいになるように水を入れる。

②: A の容器に水が入っており，B の容器に余裕があるとき，A から B に水を入れる。

③: B の容器がいっぱいになったとき，B から桶に水を全て入れる。

①を [汲む]，②を [移す]，③を [戻す] と呼ぶことにする。

この定義から，生徒に今後取り組んでいく課題を挙げさせた。その際の生徒の活動は大

きく分けると，

- 桶の水の量を固定 (容器 A と容器 B の最大容量の和を固定) して調べる。
- 容器 A の容量を固定して，$\{4,5\}$，$\{4,6\}$，$\{4,7\}$，$\cdots$ の組み合わせを順番に調べる。

の 2 つであった。

気づきとしては,「どんな量でも作れそうな気がする。」,「B が A の倍数であると，その約数で割ったときと同じ表になる。」,「どんな組み合わせでも必ずリセットが起きる。」,「コップを逆にして操作すると，表が反対になる。」の 4 つが出た。しかし，生徒 5 人が選んだ課題は

A と B の容量とリセットまでにかかる回数はどのような関係になっているのか。

であった。こうなった理由は，後で述べる。*2

5.2.2. 2 時限目

前半 1 時間は前時の研究の続きをし，後半 1 時間は研究した内容をまとめる作業をした。

(前半)

前時にそれぞれが決めた課題「リセットの回数」を解決するために，まず最初は，各自が方向性が見えるまで，値を変えて操作を繰り返し，データを増やしていく所から始まった。それによって全員が，(前時に気づいていた生徒も居たが，)「リセットにかかる回数は $2(a+b)-1$ 回ではないか」と気づいた。そこで，気づいた生徒に対して,「どうしたら証明できるのか考えてみよう。」と声かけをし，補助をした。その声かけに対して，生徒の反応は大きく次の 2 通りであった。

- 一般性を持たすために，とりあえず $\{a,b\}$ とおいて操作を繰り返してみるが，a と b をどう場合分けしてよいのかわからない。そこで，上手な場合分けを見つけるために，また新たな例に取り組みデータを増やす。
- A を固定して考える方法を発展させ，まず $a=2$ と固定して，$\{2,2t\}$，$\{2,2t+1\}$ と調べ，次に $a=3$ と固定して，$\{3,3t\}$，$\{3,3t+1\}$，$\{3,3t+2\}$ と調べ，次に $a=4$ と固定して，$\cdots$ と，順番に調べる。

こちらの想定していた，操作の定義（汲む，移す，捨てる）での証明を考える生徒はいなかった。なぜこうなったかは，後で述べる。*3

(後半)

生徒のパソコン技能に関する状況を説明する。5 人に大きな差はなかった。全員がパソコンの操作に慣れておらず，Microsoft ® Office Word（以下，Word ®） を少し使ったことがある程度であった。

LaTeX 2_ε を用いてまとめの作業に入るために，後半の 30 分程度を用い，LaTeX 2_ε の説明をし，簡単な文章を書く練習をさせた。その後に，奥村 [5]「LaTeX 2_ε 美文書作成入門」を参考書として与え，まとめる作業をしてもらった。しかし，表を書く，改行をするなどの基本的な操作について調べることが精一杯で，LaTeX 2_ε を使って本時の内容をまとめきることはできなかった。

5.2.3. 3 時限目

2 時限目の内容の続きを研究をした。本時では，課題に対して新しい結果を得ることはなかった。活動内容としては，A や B の数値を変えて多くの具体例を書き出して，規則性などを類推する作業をしている生徒が多かった。教師側からの大きな助言は，特にしなかった。

まとめに関しては，前時のことを忘れている生徒が多く，LaTeX 2_ε について同じことをもう一度調べることになり，本時も LaTeX 2_ε によるまとめはほとんど進まなかった。

5.2.4. 4 時限目

本時は，前時までにまとめがあまり進んでいなかったこともあり，研究の時間とまとめの時間を分けることはせず，どちらをやるのかは，生徒の判断に任せた。①で汲む量と③

で捨てる量が一致することに気づく生徒 (2 年生) が居たものの，3 時限目と同様に大きな進展はなかった。

5.2.5. 5 時限目

3,4 時限目と研究が煮詰まっていたので，打開策として，第 3 節の図 2 を生徒に見せ，そこに書いたように,「なぜこの図で操作全てをを表現できるのか」を前で説明した。このとき，生徒達は図が正しいものであると信じて，なぜそうなるのかは深く考えなかったようだ (これが判明したのは 7 時限目)。生徒達は図と，①，②，③の回数に着目させるような教師の補助によって，リセットの回数が $2(a+b)-1$ 回となることを証明することができた。3,4 時限目に苦労して考えていたこともあり，5 人全員があっさりと証明することができた。

$\LaTeX\,2_\varepsilon$ でのまとめは，1 年生の 1 人がある程度使えるようになっていたが，他は表を書くことに苦戦したり，見た目を整えることに苦戦したりと，Word® のように直感的に書けないことに苦戦している様子であった。

5.2.6. 6 時限目

部活動の一環で，外部での発表があると聞いた。他に発表することにより,「当人の考えを定着させる」,「他の人から質問・意見を貰い，新しいアイディアの糧とする」など，研究の一環としてのメリットが多くあるので,（当然，時間的な問題もあったが,）本時はその発表に向けて，まとめと発表の準備をすることにした。

しかし，今までまとめに使ってきた $\LaTeX\,2_\varepsilon$ は，生徒がまともに使いこなせていないため，時間がかかり過ぎるので Word® と Microsoft ® Office PowerPoint（以下，PowerPoint®）を使うことにした。発表の形式としては，1 年生 3 人合同によるポスターセッション（A1 サイズ，つまり A4 の 8 枚分，のポスターを使った発表と，そのポスターの掲示）と，2 年生 2 人合同による PowerPoint® を使ったプレゼンテーションであった。

本時以後，$\LaTeX\,2_\varepsilon$ でのまとめを一切やめた。また，研究の時間とまとめの時間を分けることもやめた。

5.2.7. 7 時限目

6 時限目と 7 時限目の間に外部での発表があった。その発表の際に注意されたこと，質問されたことに関してまとめの修正を行なった。5 時限目に説明をしたパターンの図について,「なぜそうなるのか詳しく教えてほしい。」と質問があり，そのことから，教師側に与えられたパターン図 (図 2) を生徒自身の言葉・考えでまとめることができた。

発表を合同で行なったこともあり，本時から 1 年生同士，2 年生同士の相談・交流が多く見られるようになった。

5.2.8. 8 時限目

生徒達は，A，B の最大容量が互いに素であれば，どんな量でも作れるという証明に取り組んでいた。その際に，油分けの操作の一意性が「リセットされるまでに，A と B に入っている水が $\{a, b\}$ になる場合が n 回 ($n > 1$) あるとして，矛盾を導く」ことによって示された。

また，まとめをしている最中に，リセットの回数の新たな証明が見つかった。これは図 3 と表 1 を見直してもらえば気づいてもらえると思うが，①と③の後には必ず②を行なっていることがわかる。このことより，①と③を $a+b$ 個並べて，全ての間に②を挟んだものの個数がリセットにかかる総数となることがわかった。つまり,「全ての操作の回数は，$(a+b)+(a+b-1) = 2(a+b)-1$ となる」ことがわかった。

生徒達は試行錯誤していたが，どんな量でも作れるという証明は，本時では完了しなかった。

5.2.9. 9 時限目

10 時限目での 1 人持ち時間 10 分で行う発表の準備をするように指示した。本時は，ほとんどの生徒がまとめをしていたが，操作の

一意性を証明した 2 年生の 1 人は研究も進めていた。その結果として，どんな量でも作れるという証明ができた。

5 人全員が 2 時間で発表の準備をすることはできなかったので，10 時限目までに（約 3 週間後）準備することにした。

5.2.10. 10 時限目

1 人 10 分程度の発表をした。全員が時間を越えることなく 1，2 分程度短い発表であった。その発表内容は，1 人はすべての数が作れることを，他の 4 人はリセットに関することを発表した。同じリセットに関する発表でも，次のように少しずつ着眼点が違った。

- ○ 更なる一般性を考えて互いに素でない場合も含めた一般的なリセットについて説明した生徒
- ○ パターン図 (図 3) について，なぜそうなるかをメインとして説明した生徒（2 名）
- ○ 一般的に求めたリセットを具体例に適用させて，得られた結果の正確さを伝えようとした生徒

クラブの 3 年生 5 人も参加し，質問や意見の時間も含めると，発表は 1 時間半かかった。

6. 実践の考察

6.1. アンケート結果

「2006 年の SSH を終えて」というタイトルで記述式のアンケートを行なった。質問と 5 人分の回答をそのまま次に載せる。

1.「油分け算の研究において，印象に残ったことを書いてください。（興味が持てたこと，面倒だと感じたこと，難しいと感じたこと，驚いたことなど）」

- ○ リセットまでの回数や作ることのできる容積について考えたこと（が印象に残った）。
- ○ 学校の授業と違って，自分で課題を見つけることが難しかった。
- ○ 結果がわかっているのに証明できないことが難しく感じた。
- ○ 相手に理解してもらうことが難しいと感じた。証明・日本語・パソコンと難しいことが多かったです。
- ○ ポスター作り（発表の準備）に毎回苦労した。
- ○ リセットの証明の方法が 2 つ見つかったことに興味が持てた。

2.「油分け算の研究において，自分が楽しめた・集中して取り組めたと感じたことを書いてください。」

- ○ リセットまでの回数の予想を出すのが大変だったけど面白かった。
- ○ 紙をたくさん使って，証明ができるように頑張ったことがよかった。
- ○ ポスター作りのときに，一つの証明をより分かりやすくするようにするため，集中して取り組めた。
- ○ ポスターに，自分の研究の内容を正しく，わかりやすく書くことができた。
- ○ 証明に集中してできました。証明などを自分で考えたり，試したりするのが楽しかったです。特に，自分で証明が出来たときは嬉しかった。

3.「最後の発表はうまくできましたか。自分の発表でよかったと思う点を挙げてください。」

- ○ パワーポイントを上手に使って，自分の研究をしっかり発表できたこと。
- ○ うまく話すことができなかった。今後は聞いてる人の方を向いて話をしていきたい。
- ○ 聞いてる人の方を意識して話すことができた。これからも続けていきたい。
- ○ 全ての量についての発表をすることができてよかったと思います。
- ○ 図を多く使って，分かりやすくしようとできたのでよかった。

4.「また，発表を通して，次に生かしたいと感じた点を挙げてください。」

- ○ Aさんの発表を聞いて，自分も作ることのできる量について，しっかりと説明できるようにしたいと思った。
- ○ もっと図を増やすなどして見やすいパネルを作っていきたい。また，うまく話せるようにしたい。
- ○ ポスターに図，表をもっと使って見やすくしていきたい。
- ○ 相手にわかりやすいように，聞き取りやすいように発表をしたいです。
- ○ 練習をしっかりするべきだった。見直しをしっかりとしておけばよかった。

まず，このアンケートの意図を説明する。質問1，2は,「研究をどのようなものであると認識したのか」,「油分け算が研究対象として満足できるものだったのか」,「生徒が研究のどの部分に興味を持ったのか」など，研究過程を十分に体感したのかを確認するものとして設定した。また，質問3，4は，最初の発表の準備の際に,「発表は面倒。自分で納得できればいい。」という発言をする生徒が居たので，交流することを研究の一環として認識したのかを確認するものとして設定した。そして，質問をすることでそのことを認識させる意図もあった。

質問1，2の回答から，研究が「課題を設定し，追求し，そして人に伝える」ものであると認識してもらえたことがわかる。また，質問の意図にはなかったが，発表が研究の一部であることは認識していることが伺え,「伝えることの難しさ・大切さ」を学んでいることがわかる。リセットに関する予想・証明のことについて,「苦労した・達成感があった」という意見もあり，生徒が少なからず満足していたことがわかる。

質問3，4の質問は，質問1，2の回答を見る限り，蛇足であったと感じた。強いて考察するとすれば，生徒達の回答から，発表・交流することへの積極性が現れていることが伺える。

6.2. (*1)〜(*3) に関する考察

本論文中にて「後で述べる」と書いた事柄について，ここで考察する。

(*1) 補助について

再度書くが，本授業実践の目的は，数学の研究を体感し,「数学的な見方・考え方を養うこと」である。そのために，自主的な活動を促す意図で，助言は極力少なめにした。

全体を通して見ると，助言を少なめにした結果が如実に現れているのは，3〜5時限目である。リセットの証明で煮詰まっている生徒に対して道しるべとなるような助言をしないことで，4時限目1コマ分が，表面上は,「結果のでない，形に表れない無駄な時間」になった。しかし，アンケートの質問1，2の回答を読んでもらえれば,「研究が試行錯誤の繰り返し」であることを強く認識してもらえたことが伺える。また，苦労したことによって，各生徒が自分の見方で油分け算について捉えており（これは発表内容の差異からも伺える），数学的な見方・考え方を鍛えることになったと考えられる。また，その苦労が長かった分，結果を得たときの達成感・満足感が大きかったこともわかり，7時限目以降で集中した取り組みができたことに繋がったと考えられる。ゆえに，2時間10コマという長い時間においては，5人の生徒が数学に対して積極的であったこともあり，今回の補助の方針は適していたと考える。

ただし，教師の誘導（ヒント）があったならば（例えば，5時限目に与えたパターン図(図2)を4時限目に与えるなど），時間に余裕ができただろう。その時間を使って，新たな提案をしていく方向で授業を進めれば，様々な見方によって，様々な課題が見つかることを理解してもらえ，数学的な見方・考え方の1つである「数学的な設定をする力」を伸ばしやすくなるのではないかと考えた。（新たな提案とは，例えば,「コップを増やして考えてみ

る。」,「他の和算について調べてみる」など）

(∗2) 生徒の課題設定について

なぜ全員の課題が「リセットの回数を求める。」になってしまったのだろうか。まず，課題として選びやすいものが,「リセット」と「作ることのできる量」の2つであるからだと考える。この2つは，表を書くとすぐ浮かんでくる疑問であるので，他と比べて最初に思いつきやすい。また，少し触っただけでは証明方法の予測がつきにくく，証明するまでに時間がかかる疑問でもある。ゆえに，生徒達の多くが，この2つから課題を選ぶことを予想していた。

では，その2つのうちなぜリセットが選ばれたのか。それは恐らく，最短手順である「ルール①〜③」を与えたことが原因であると予想できる。なぜなら，ルールを与えたことによって「どのような数が作れるのか。」という課題は，表を作った後の「単なる確認作業」になってしまい，興味の持ちにくい疑問になってしまったと考えられる。ゆえに，5人全員が2つの大きな課題のうちから「リセット」を選ぶ結果となったのではないだろうか。そこで，最短手順（ルール）を考える機会を与えれば,「作ることのできる量を探す」という課題に，目が向くのかもしれないと考えた。しかし，生徒がルール①〜③を定義として考えつく可能性はかなり低いと思われる。ゆえに，最短手順を考える機会を作ることは，生徒が油分け算に取り掛かりにくくなるデメリットが大きくなるので，そうしない方がよさそうである。簡単に，一番最初の「指定された量を作る時間」を増やせば，量を作ることを考える時間が増えるので，選ぶ課題が偏らないかもしれない。また，(∗3) についての解決になる可能性もある。

(∗3) 手順に目が向かなかったことについて

3，4時限目，併せて約3時間を費やしてもリセットの回数について証明することができなかった。これは，操作の手順①〜③が，教師側から与えられたものであったため，生徒自身が操作の定義を信じきっており，使いこなしていなかったからであると考えられる。それゆえに，操作を行なってデータを増やすことはできても，その前後関係（図2）に気づくことができなかったのではないか。また実際に,（6時限目と7時限目の間にあった発表でパターン図 (図3) について質問され,）7時限目で生徒自身の知識として使いこなせるようになった後では，新しいリセットの証明が生まれるなど，生徒自身の活動が軌道に乗り，結果に現れている。

最初から，手順を生徒に考えさせることによって解決できそうではあるが，(∗2) でも触れたように，生徒がルール①〜③を定義として考えつく可能性はかなり低い。ゆえに，このパターン図 (図2) はどこかで見せる必要があると感じた。

6.3. 目的の達成について

次に，第4節で定義した研究のどの部分に当たるかを述べる。

- 毎時，生徒達が行なっていた課題を追求する活動は,「試行錯誤」である。
- 外部での発表や最後の発表は,「発信・交流」である。
- また，普段の教師とのやりとりや，生徒間の相談も「発信・交流」である。
- 油分けのルールを信じること，ルールを理解することは「学習」である。
- また，5時限目最初のパターン図 (図2) について話を聞いたことも「学習」である。

上のように，数学を用いて研究する過程を体験することができた。そして，アンケートの質問1，2の回答から，研究が有意義であると感じていることがわかる。このような結果を生んだ原因としては，生徒達が「試行錯誤し，データを集めて，考察する。」という地味な作業を諦めずに続けたからだと考える。ま

た，この作業をすることによって，数学的な見方･考え方の力は伸びていると考える。このことから，数学のクラブに所属していて,（数学に関して）積極的であることを差し引いても，油分け算が，目的の達成に適した教材であったといえる。

油分け算でリセットに関する証明をする場合に，数学的な見方・考え方を用いるためには，生徒が 3，4 時限目に苦労したことから，「パターン図（図 1）」の提示が最低限必要であると感じた。

6.4. $\LaTeX\,2_\varepsilon$について

$\LaTeX\,2_\varepsilon$がどのようなものであるかは，第 5.1 節で簡単に触れた。本授業実践では，実際の研究に近づけるという意図で $\LaTeX\,2_\varepsilon$を用いた。しかし，生徒が使いこなせず，授業が停滞してしまう可能性が高いことがわかった。また，Word® と PowerPoint® は，$\LaTeX\,2_\varepsilon$に比べて，容易に使いこなしていた。更に，$\LaTeX\,2_\varepsilon$からの切り替えが問題なかったことより，直感的に使うことができる Word® と PowerPoint® のよさを見ることもできた。

この実態から，本実践で $\LaTeX\,2_\varepsilon$を用いたことは失敗であったことがわかる。よって，$\LaTeX\,2_\varepsilon$を無理に使う必要はないという結論が出た。

7. 最後に

この授業展開は，数学にかなり興味のある生徒を対象として（選択授業で数学を選ぶ生徒より，その興味は上だと思われる），放任気味で行なった。もし，通常のクラスが授業時間 4 時間をノーヒントで活動すれば,（本授業実践ではうまくいったが,）多くの生徒は，試行錯誤の段階で飽きて，諦めてしまうことが容易に想像がつく。従って，今回生徒 5 人全員が，諦めず試行錯誤をし，相談し，苦労を続けたことによって，結果を出し，それにやりがいを感じて，面白いと思ってくれたことに，我々は驚きと軽い感動を覚えた。特に定義を正確に把握しようとしたことは，素直に凄いと感心した。そのため，$\LaTeX\,2_\varepsilon$を用いて無駄な時間を割いてしまったことなど，もっと効率的に，もっと生徒に考えさせる内容の授業ができたのではないかと，我々の授業への研究不足を後悔している。

その後悔を踏まえて，(*2) の考察中では諦めてしまったが，生徒自身で油分け算の最短手順となるルールを作ることができれば，より面白くなるだろうと考えている。しかし，本論文中で考察したように，最初の問題を与えただけで，そこを考えさせることは恐らく無理である。このことをクリアして，自然に誘導して，生徒にルールを考えさせる授業展開を考えることが，1 つの課題である。

また，一般論として研究は続いていくものである。ゆえに，1 つの結果を得ただけで終わってはならない。今回は，外部での発表の後に活動が活発化した。このように，似たような長時間の授業実践があった場合に，発表を最後の授業とせずに，発表後に考える時間を与えてみるなどの方法で，発表後に生徒の興味を引ける幕引きを考えることも，1 つの課題だと感じた。このことは，普通に考えれば，発表することで終了した気分になるので，簡単にはいかないだろう。

数学が，数学の研究がどんなものであるのかを生徒に体感してもらうために，興味の持てる展開を考えていきたい。

参考・引用文献

[1] 山路健祐，山田雅博，2002, 和算を用いた総合的な学習における教材の一提案〜高校数学セミナーでの実践を通して〜, 岐阜数学教育研究第 1 号, pp. 128-146.

[2] 山路健祐，2002, 算数・数学教育における和算の活用，2002 年度岐阜大学大学院教育学研究科数学教育専攻修士論文.

[3] 嶋田珠理，山田雅博，2005, 算数の有用性が感じられる教材の開発とその実践

～「水分け算」を用いた整数の見方に対する問題を通して～，岐阜数学教育研究第 4 号, pp. 74-83.

[4] 和算研究所塵劫記委員会，2000, 現代語『塵劫記』，東京書籍.

[5] 奥村晴彦，2004, [改訂第 3 版] LaTeX 2_ε 美文書作成入門，技術評論社.

[6] 文部科学省，2003, 高等学校学習指導要領解説―総括編―，東山書房.

[7] 文部科学省，2003, 高等学校学習指導要領解説―数学編，理数編―，東山書房.

[8] 寺田文行，1997，数学ランド・おもしろ探検，森北出版株式会社.