

選択数学における教材の開発と実践

黒木悠太¹, 愛木豊彦²

近年, 子ども達の数学への「関心・意欲」が低迷している実態がある。その実態の改善を目指し, 身近な事象に焦点を当てた教材開発を行った。関数的な見方や考え方の良さ, 数学の有用性を感じてほしいという願いもあり, 2乗に比例する関数のグラフについて教材開発を行った。この教材では, 疑問を持ち, 予想を立てた後, 具体的操作活動や既習事項を基にして疑問を解決していくという一連の活動を通して, 数学の有用性を見出すことを目的としている。本論文では, 2006年12月初頭に行った中学校3年生の選択数学の授業における実践について報告する。

<キーワード> 関数, 放物線, 予測, 実験, 問題解決

1. はじめに

国際数学・理科教育動向調査の2003年調査(TIMSS 2003)([1])による「算数・数学の勉強は楽しいか」という質問に対して, 日本では「強くそう思う」と答えた児童・生徒の割合は小学校4年生で29%, 中学校2年生で9%と国際平均値を大きく下回った。また, OECD生徒の学力到達度調査(PISA 2003)によると, 数学への興味・関心や数学の楽しさに関する4つの質問項目「数学についての本を読むのが好きである」「数学の授業が楽しみである」「数学を勉強しているのは楽しいからである」「数学で学ぶ内容に興味がある」に対して, 肯定的に回答した日本の生徒の割合はそれぞれ13%, 26%, 26%, 33%であり, いずれもOECD平均より少ない結果となっている。

さらに, 中学校数学科の改善の基本方針([2])として, 「実生活における様々な事象との関連を考慮しつつ, ゆとりをもって自ら課題を見つけ, 主体的に問題を解決する活動を通して, 学ぶことの楽しさや充実感を味わい

ながら学習を進めることができるようにすることを重視する。」とある。

これらをふまえて, 数学を身近に考えられ, 有用性を感じられるような教材の開発を行った。中学校の学習で, 関数 $y = ax^2$ のグラフ「放物線」を日常生活と結びつけて考えることはほぼない。さらに, 与えられた関数のグラフが放物線であるかどうかを確かめる学習をすることはない。そこで, 身近な事象から図形を発見し, それが放物線かどうか検証する活動を取り上げることにした。この活動によって, 予想を立て自ら課題追究に向かっていく姿勢を養うことができる。さらに, 身近な事象を題材にしているので, 数学の実生活での有用性を感じることができ, 数学への興味・関心を高められると考える。

2. 授業の概要

2.1. 教材

題材として選んだのは懐中電灯のつくる光の形である。懐中電灯という身近な物を使い, 懐中電灯の光によってできる形を観察し, 予

¹岐阜大学教育学部

²岐阜大学教育学部, 科学研究費(特定領域研究), 課題番号 17011034

測するという教材を開発した。

懐中電灯の光によってできる形には主に円(写真1), 楕円(写真2), 曲線(写真3)などがある。

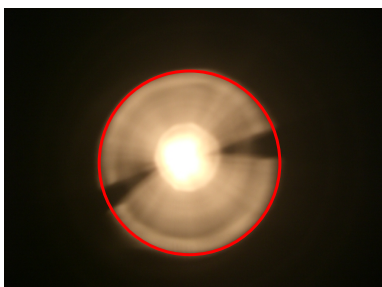


写真1



写真2

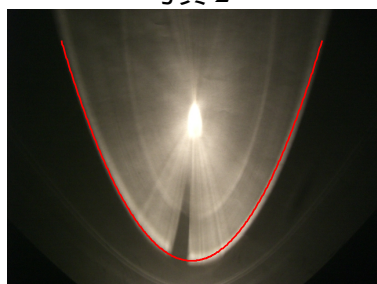


写真3

懐中電灯の角度を変えていくと, 写真3のような放物線らしき曲線が現れる。詳しく述べると, 懐中電灯から出る光の道筋の形は円錐である。従って, その円錐の母線を図1のように光を写す面と平行にすると, 光のつくる形を囲む曲線は放物線になる。

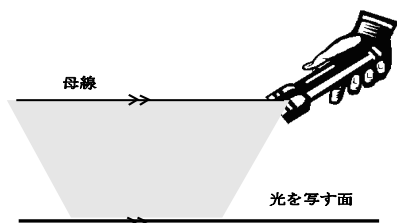


図1

つまり, ある角度でしか放物線にならない。そのため, 正確な放物線の形を撮影するのは非常に困難である。教材として扱うには, 他にも次のような難点がある。

- 光のつくる形の端(以下「光の外形」と呼ぶ)は曖昧なので, どこを調べるかがはっきりしない。
- 光の外形が放物線かどうか確かめるには, 光の外形を写した写真に座標軸を書き込まなければならない。このとき, もし, 光の外形が放物線だとしても, 座標軸を正しくとらなければ, $\frac{y}{x^2}$ の値は一定にはならない。

結果として, 授業で採用した写真は次のものである(写真4)。また, 上述の理由により, 写真に座標軸を書き込むのは, 中学生には難しいと判断したので, この作業は授業者が行うことにする。

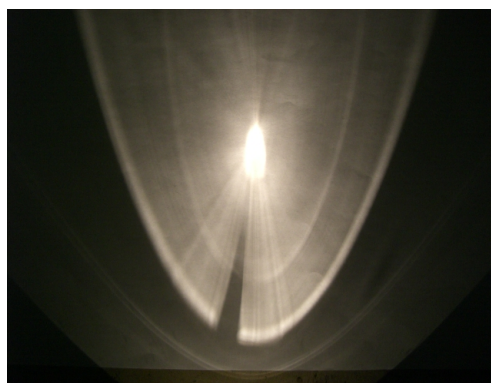


写真4

この写真に座標軸を書き込み, 値を調べると次のようになる。

x	1	2	3	4	5	6
y	0.05	0.2	0.5	0.9	1.4	2.05
$\frac{y}{x^2}$	0.05	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06

表1

表1では, $\frac{y}{x^2}$ の値は, 0.05 や 0.06 とほぼ一定ではあるが, 正確に見れば一定の値にはなっていない。従って, 写真4のグラフが放物線であると感じられるよう次の写真のグラフと比較することにした(写真5)。

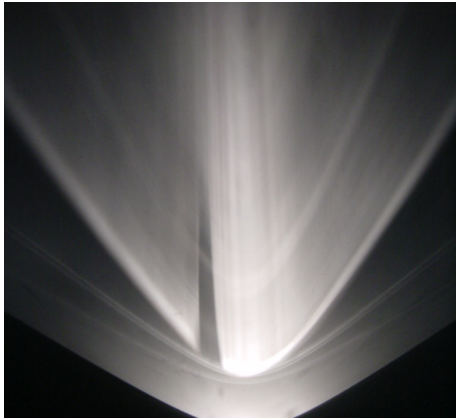


写真5

この図における $\frac{y}{x^2}$ の値を調べると、次のようになる。

x	1	2	3	4	5	6
y	0.6	2	3.8	6	8.4	11
$\frac{y}{x^2}$	0.60	0.50	0.42	0.36	0.33	0.31

表2

これは $x > 0$ の範囲において、 $\frac{y}{x^2}$ の値が明らかに減少している。よって、この2つのグラフについて考察することで身近に放物線があると感じられるのではないかと考えた。

2.2. 授業の流れ

2.1 節で述べたことを考えられるよう授業の流れを次のように設定した。

実験

懐中電灯を使い、懐中電灯の光によってできる形にはどんなものがあるかを見つける。

実験の考察・課題設定

できた形（外形）の中に放物線らしき曲線が現れる。それらは全て放物線なのか、どれが放物線なのかという疑問を持つ。ここで放物線について確認し、「見つけた曲線が放物線かどうか調べよう」という課題設定をする。

個人追究

2つの曲線（写真4と5）について調べる。学習プリント（資料2,3）を使い、課題解決に向けて個人追究を行う。調べ方は一通りではないので個々に任せる。学習プリントは写真

のみを提示し、生徒自身が座標を挿入し、値を取らせ、個人追究させるつもりであったが、時間の都合上、学習プリントの写真にはあらかじめ座標軸が挿入してあり、さらに、値を表にまとめてあるものも配布した。予想される考え方を以下に示す。

（考え方1）

$\frac{y}{x^2}$ の値が一定かどうかで判断する。

放物線（写真4）

x の値	y の値	$\frac{y}{x^2}$
-7	2.4	0.049
-6	1.8	0.05
-5	1.3	0.052
-4	0.8	0.05
-3	0.5	0.056
-2	0.2	0.05
-1	0.05	0.05
0	0	-
1	0.05	0.05
2	0.2	0.05
3	0.5	0.056
4	0.9	0.056
5	1.4	0.056
6	2.05	0.057
7	2.7	0.055

双曲線（写真5）

x の値	y の値	比例定数
-7	12.4	0.253
-6	10.0	0.278
-5	7.8	0.312
-4	5.8	0.363
-3	3.4	0.378
-2	1.8	0.45
-1	0.6	0.6
0	0	-
1	0.6	0.6
2	2.0	0.5
3	3.8	0.422
4	6.0	0.375
5	8.4	0.336
6	11.0	0.306
7	13.4	0.273

（考え方2）

y の値の階差の差が一定かどうかで判断する。

放物線

x の値	y の値	y の値の階差	階差の差
-7	2.4	-	-
-6	1.8	0.6	-
-5	1.3	0.5	0.1
-4	0.8	0.5	0
-3	0.5	0.3	0.2
-2	0.2	0.3	0
-1	0.05	0.15	0.15
0	0	0.05	0.1
1	0.05	-0.05	0.1
2	0.2	-0.15	0.1
3	0.5	-0.3	0.15
4	0.9	-0.4	0.1
5	1.4	-0.5	0.1
6	2.05	-0.65	0.15
7	2.7	-0.65	0

双曲線

x の値	y の値	y の値の階差	階差の差
-7	12.4	-	-
-6	10.0	2.4	-
-5	7.8	2.2	0.2
-4	5.8	2	0.2
-3	3.4	2.4	-0.4
-2	1.8	1.6	0.8
-1	0.6	1.2	0.4
0	0	0.6	0.6
1	0.6	-0.6	1.2
2	2.0	-1.4	0.8
3	3.8	-1.8	0.4
4	6.0	-2.2	0.4
5	8.4	-2.4	0.2
6	11.0	-2.6	0.2
7	13.4	-2.4	-0.2

(考え方3)

x の値が2倍, 3倍になったときに, y の値が 2^2 倍, 3^2 倍になっているかどうかで判断する。

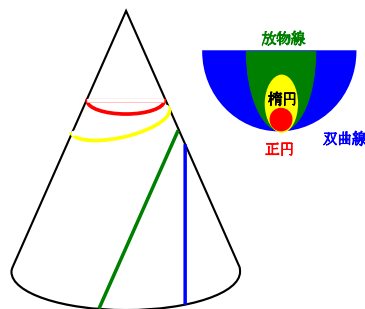
x	y
0	1
1	0.05
2	0.2
3	0.5
4	0.9
5	1.4
6	2.05
...	...

$\xrightarrow{\times 2 \quad \times 3}$
 $\xrightarrow{\times 2^2 \quad \times 3^2}$

全体交流・まとめ

課題解決に用いた調べ方や結果について資料を用いて仲間に伝える。最後に円錐を使っ

て, どのようなときに放物線が現れるか説明する。



2.3. 授業のねらい

今まで述べてきたことから, 授業のねらいは以下の3点にした。

- (1) 現れた光が放物線であるかどうか, また, どのように調べるか予想を立て, 自ら進んで課題追究に向かうことができる。
- (2) 関数 $y = x^2$ のグラフが日常生活の中にあることを知り, 放物線を身近に感じることができる。
- (3) 数学の実生活への有用性を感じることができ, 数学への興味・関心を高めることができる。

3. 実践結果

以下のとおりに実践を行った。

場所: 岐阜県岐阜市立青山中学校

日程: 平成18年12月1日 第1校時

参加生徒: 選択数学の3年生の生徒5人

3.1. 活動の様子

授業の計画は指導案(資料1)で示している。

(実験について)

懐中電灯を各自1本ずつ渡し, 個々に懐中電灯の光によってできる形を見つけた。最初は懐中電灯を机に垂直に向け, 大きさの違う円を作るのみであったが, 次第に懐中電灯を傾けることにより楕円を見つけ, さらに懐中電灯を傾げることで放物線らしき曲線を見つけていた。(写真6,7)



写真6



写真7

(実験の考察・課題設定について)
 懐中電灯をある程度傾けることにより、できた光の形を見て放物線だと生徒は認めた。さらに、懐中電灯を傾けていくと似たような形が連続して現れる。放物線のように見える形の中で、放物線になっているものと双曲線になっているものとを提示したところ、両方とも放物線みたいだが、はっきりとはわからないという意見が出た。放物線とは関数 $y = ax^2$ のグラフであるということから、光のつくる外形を囲む曲線がこの関係で表されているかどうか調べるということを課題とした。

(個人追究について)

学習プリントを使って、それぞれの調べ方で曲線が放物線かどうか調べていた。ここで3人の考えを紹介する。

A君 … $y = ax^2$ に $x = 1$ とその時の y の値を代入して a の値を求める。そしてできた式に他の x の値を代入して、計算して出した y の値が表の値と一致するか調べる。(写真8,9)

B君 … $y = ax^2$ の x と y に値を代入し、 a の値が一定になるか調べる。(写真10,11)

C君 … y の値の階差の差が一定になっているか調べる。(写真12,13)

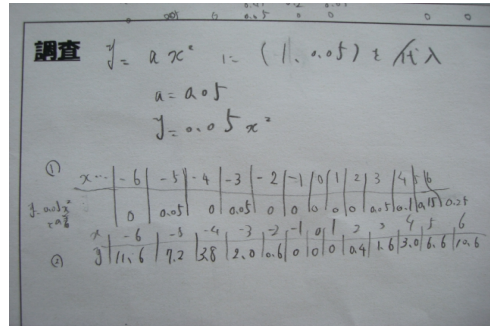


写真8

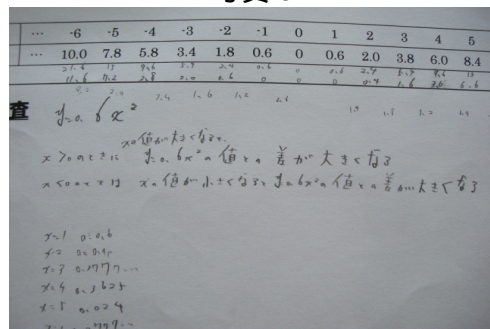


写真9

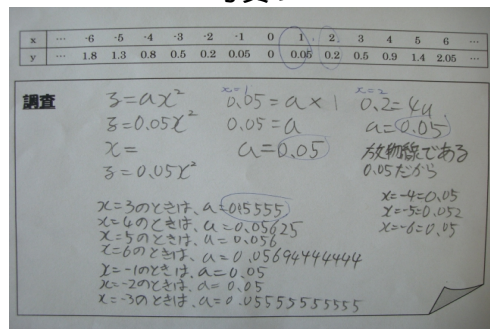


写真10

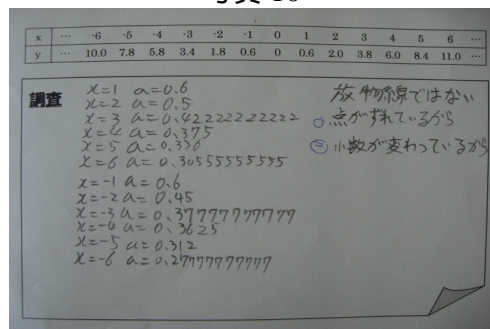


写真11

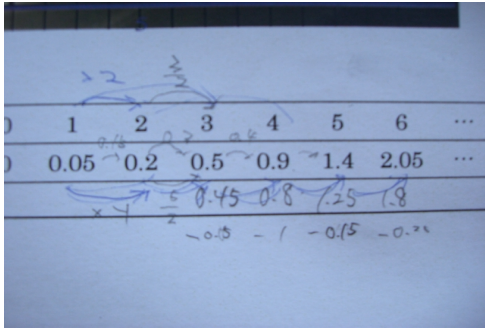


写真 12

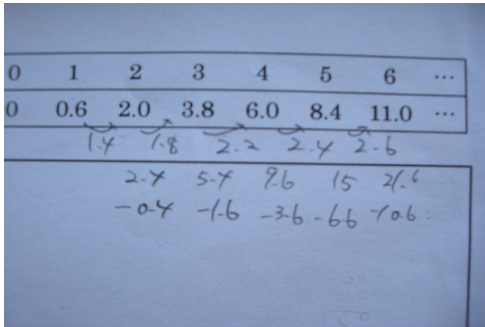


写真 13

どの生徒の考えを使っても、1つ目の曲線を調べた時点では「放物線と言えそうと言えない」、「完全には違う」という感じであった。しかし、2つ目の写真に取り掛かると、「放物線じゃない」、「全然違う」という声が聞こえてきた。2つ目を終えた時点で2つを見比べると、「1つ目の写真のほうが放物線っぽい」、「1つ目は完璧にはではないけど放物線と言ってもいい」という考えに達していた。

(全体交流・まとめについて)

生徒の書いたまとめを紹介する。

- 左の曲線は a の値に近いが右の曲線は値がずれていく。
- 左側の曲線はなんとか規則性があるけどしっかりとした $y = ax^2$ ではないのでやや放物線としておく。右側は規則性がないので放物線ではないとする。 y の値の増加には規則性がある。(直線?)
- 1つ目は、 $y = ax^2$ の x と y に値を代入数すると、0.05 になった。2つ目は、点がずれて、小数がかわっているから放物線ではない。

- $y = ax^2$ に代入すると a の値が右側はほぼ一致するが、左側は異なる。
- 放物線になるものとならないものがあることがわかった。

(生徒の感想)

- 今日は、実際にライトを使っただけの実験がおもしろかった。計算していくのは、けっこうめんどうだった。でも、手間がかかっていたのでなんとなくうれしかった。
- 放物線を調べるときに、メモリを見て、ずれているのか確認をすることが出来たので良かったです。
- 放物線かどうかを調べて、自分の結論として左の図は放物線に近いと思った。話を聞いて放物線になるのは母線と平行な線だけだと分かった。
- 2つのパターンから、放物線を意識して調べた。そこから結果を出した。強引に「やや放物線」とか「直線っぽい」としたら意外に当たっていて面白かった。
- 放物線かどうか調べるのが少し難しかったけれど、交流や説明でしっかり分かった。ライトの光は円錐曲線になっていて、こういう所で数学ができるのはおもしろいし、放物線になる所がひとつというのも興味深かった。いろいろなことを数学を使って考えることができるのはすごいと思った。

4. 考察

アンケートの結果を報告する。

1. 今日の授業はどうでしたか。

楽しかった(100%) 普通(0%) 楽しくなかった(0%)

2. 懐中電灯を使っていくつ図形を見つけられましたか。

3個(80%) 2個(20%) 1個(0%)
0個(0%)

3. 自分で放物線かどうか判断することができましたか。

できた (100%) できなかった (0%)

4. 放物線かどうか調べてみたいものはありますか。

- 眼鏡のレンズ
- パラボラアンテナ
- 目ん玉

先に述べた3つのねらいについて考察する。

(1) 現れた光が放物線であるかどうか、また、どのように調べるか予想を立て、自ら進んで課題追究に向かうことができる。

題材が懐中電灯という身近なものであったため、生徒はすぐにこの教材に興味・関心を持ち、積極的に活動した。様々な角度に懐中電灯を傾け、できる光の形を観察したり、見つけた曲線が放物線であるかどうか進んで課題追究する姿が見られた。以上より、このねらいについては十分に達成されたと考える。

(2) 関数 $y = x^2$ のグラフが日常生活の中にあることを知り、放物線を身近に感じることができる。

生徒から「これ放物線や」や「こんなところに放物線があるのか」「放物線って特別なんや」という言葉が聞けた。このことから、このねらいについてはほぼ達成されたと考える。

(3) 数学の実生活への有用性を感じることができ、数学への興味・関心を高めることができる。

「いろいろなことを数学を使って考えることができるのはすごい」という生徒の言葉があったことから、このねらいについて達成できたと考え。

5. 今後の課題

まず第1に、この教材の見直しである。課題追究に入ったときに、手が止まっている生徒

が多かったことから、課題追究に入る前に放物線とはどういうものだったか、関数 $y = ax^2$ の性質についての確認をしっかりとしておくべきだったと考える。また、今回放物線として提示したグラフを生徒は、「やや放物線」、「放物線っぽい」と表現した。これは、2つのグラフを与えたため、このような表現をしたものだと思われる。授業計画の段階では「放物線といえる」ということを結論としていたが、本授業での生徒の表現の方が数学的である。次回、このような授業をする際には、生徒の導いたアイデアも盛り込みたい。さらに、放物線を懐中電灯の光によって提示したが、他の暮らしの中のものも題材とした授業展開を考えていきたい。今回の学習プリント作成に使った写真を撮るのに手間暇・試行錯誤が膨大だったことから、必要な見直しであると考える。

第2に、新たな教材開発も行っていく。暮らしの中や身近なことで、算数・数学を使って問題解決をしていくことができると気付けるような教材を開発していこうと考えている。

引用文献

- [1] 文部科学省，国際数学・理科教育動向調査の2003年調査 (TIMSS2003) 及び OECD 生徒の学力到達度調査 (PISA2003).

http://www.mext.go.jp/b_menu/houdou/16/12/04121301/002.htm

http://www.mext.go.jp/b_menu/toukei/001/04120101.htm

- [2] 文部省，1999，中学校学習指導要領（平成10年12月）解説 数学編 .

資料 1

展開	学 習 活 動	留 意 点
<p>導入</p> <p>展開</p> <p>まとめ</p>	<p>懐中電灯に興味をもつ 懐中電灯の光のできる形で遊ぶ</p> <ul style="list-style-type: none"> - 円，楕円，放物線。 放物線についての確認 - 滑らかな曲線。U みたいな形。 - 関数 $y = ax^2$ のつくるグラフ。 放物線かどうか調べてみる - 放物線に見える形はいくつもある。 <p>課題</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">放物線かどうか調べよう。</div> <p>学習プリントを使って個人追及</p> <ol style="list-style-type: none"> ① 比例定数がほぼ同じであるものと，同じでない（x の値の絶対値が小さくなるほど比例定数は大きくなる）ものがある。 ② 表から，y の値の階差の差がほぼ一定のものと，違うものとわかる。 ③ 変化の見方によって，2 乗に比例するものと，しないものがある。 <p>点をとる位置が曖昧なため，一定の値は出てこない。</p> <p>放物線のグラフの入った写真を見て，確認する</p> <p>まとめ</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">懐中電灯で作る光の中には放物線がある。</div> <p>アンケート調査</p>	<p>・懐中電灯を渡し，できる光の形を意識させる。</p> <p>・関数 $y = ax^2$ について学習しているため，わかると思われるが，出てこなければこちらから示す。</p> <p>・懐中電灯の光で放物線と双曲線を提示する。</p> <p>・学習プリント配布</p> <p>・比例定数，y の値の階差，変化で調べるようにする。</p> <p>・ほぼ，正確には調べることができないが，近い値が出ればよい。</p> <p>・一見放物線に見えてもそうでないものはたくさんある。</p> <p>時間に余裕があれば，円錐と放物線の関係を説明する。</p>

資料2

PARABORAS

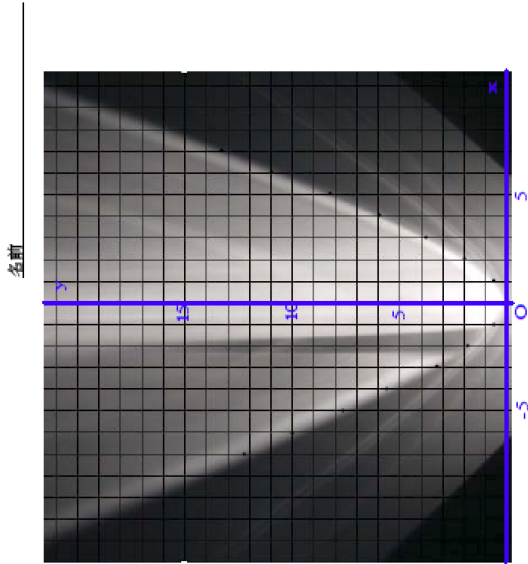
名前 _____

放物線かどうか調べよう。

<考察> わかったこと

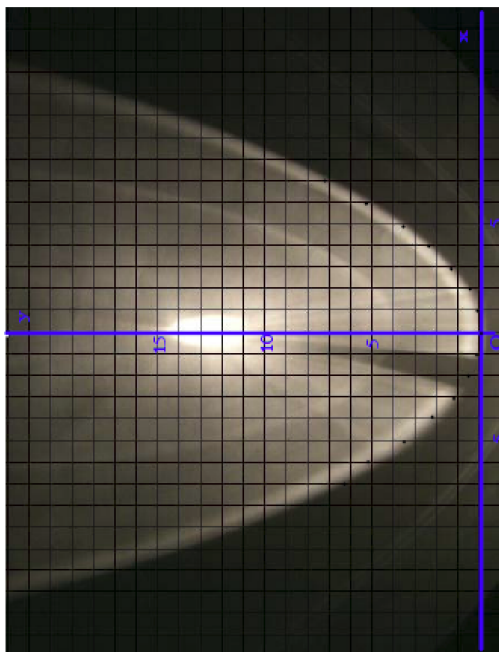
<まとめ>

資料3



x	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...	10.0	7.8	5.8	3.4	1.8	0.6	0	0.6	2.0	3.8	6.0	8.4	11.0	...

調査



x	...	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	...	1.8	1.3	0.8	0.5	0.2	0.05	0	0.05	0.2	0.5	0.9	1.4	2.05	...

調査