岐阜数学教育研究
2006, Vol.5, 26-38

統計の有用性を体感する教材の開発と実践

岩田和也[1]，愛木豊彦[2]

確率に代表される統計学は，テスト結果の平均や分散，偏差値を求めたり，商品の利益についての期待値を求めるなど様々な場面で活躍している。それゆえに子ども達に数学の有用性を伝えやすい内容であるにも関わらず，学校教育の学習内容から削減されている。そこで，統計学の有用性を伝えることを目的とする在庫問題を題材とした授業案を開発した。本論文では，授業案の開発の背景やその内容，実践結果などについて報告する。

＜キーワード＞期待値，事象の独立性，シミュレーション，在庫問題

1. 教材開発の背景

確率は，様々な現象の表現として用いられてきている。特に，戦後からは電子計算，数学，統計学の発達により管理的な諸問題に対し，数理的な接近が試みられ，産業界で統計が使われだした。そして，科学的な方法を適用し，企業の意思決定を行えるような基礎資料が作成されてきた (例えば，依田 [1])。

ここで，確率を学習する際に用いられる題材の具体例を教科書 (中学校：大日本図書 [2], 高校：数研出版 [3,4]) から抜き出す。

中学校数学 2(確率)

- 袋の中に同じ大きさの玉が 5 個入っていて，それには 1 から 5 までの番号が書いてある。玉を 1 個取り出すとき，番号が偶数である確率を求めなさい。
- K さんと S さんがじゃんけんを 1 回するとき，あいこになる確率を求めなさい。
- 2 個のサイコロを同時に投げるとき，目の和がいくつになる確率が最も大きいですか。
- 3 本のうち当たりくじが 1 本入った箱がある。この中から 1 本引き，それを箱に戻してからもう 1 本引くとき，2 回とも当たりくじを引く確率を求めよう。
- ジョーカー以外の 52 枚のトランプをよくきってから 1 枚引くとき，ハートのカードが出る確率を求めなさい。

数学 A(場合の数と確率)

- ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプから 1 枚を選ぶとき，それが絵札である確率を求めよ。
- 15 本のくじの中に，1 等が 1 本，2 等が 3 本，3 等が 5 本ある。このくじを 1 本引くとき，1 等から 3 等までのどれかに当たる確率を求めよ。
- A,B,C の 3 人がじゃんけんを 1 回するとき，A を含む 2 人が勝つ確率を求めよ。
- 白玉 8 個，赤玉 4 個，青玉 3 個が入っている袋から，よくかき混ぜて，玉を同時に 3 個取り出すとき，少なくとも 1 個は白玉である確率を求めよ。
- 1 から 10 までの番号をつけた 10 枚のカードから，同時に 2 枚取り出すとき，番号の積が偶数になる確率を求めよ。

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学大学院教育学部 文部科学省科学研究費，課題番号 17011034

- 1個のサイコロを投げて，3以下の目が出ると100円，4または5の目が出ると250円，6の目が出ると400円の賞金が得られるとする。この試行において，サイコロを1回投げて得られる賞金額の期待値を求めよ。

数学C(確率と確率分布)

- 1から50までの番号のついた50枚のカードから，1枚のカードを抜き出すとき，その番号が2でも3でも割り切れないか確率を求めよ。
- 当たりくじを3本含む10本のくじがある。引いたくじはもとに戻さないで，1本ずつ2回引くとき，1本だけが当たる確率を求めよ。
- ジョーカーを除く1組のトランプ52枚の中から1枚を引き，それを戻さないで続いてもう1枚引くとき，2枚ともハートである確率を求めよ。
- 袋Aには白玉3個と黒玉4個，袋Bには白玉3個と黒玉2個が入っている。まず，袋Aから1個取り出して袋Bに入れ，よくかき混ぜてから1個を取り出して袋Aに入れる。このとき，どちらの袋の中の白玉，黒玉の個数も初めと変わらない確率を求めよ。
- 1個のサイコロを12回投げるとき，出る目の和をXとする。確率変数Xの期待値と分散を求めよ。

ここで示したように，確率を学習する際の題材は，サイコロやくじ，カードなどのゲーム的なものである。従って，確率が現実社会で多様に応用されていることを，高校生に伝えることが重要であると考え，そのことをねらいとした教材を開発することとした。第二筆者は，既に，自動車保険を題材とした授業案を開発し，実践している([5])。その実践において，保険商品開発を模擬的に体験できるゲームを提案した。そして，確率の有用性を理解するための方法として，簡単なシミュレーションが有効であることを示した。このような授業案，特にシミュレーションの開発が数多く必要であると考え，今回は高校生向けに商品の在庫数を題材とする授業案を開発し，実践した。在庫問題については，依田[1;5章]を参考にした。また，統計関連の教材としては，中学生用の愛木・井上[6,7]がある。本稿の内容の一部は愛木・岩田[8]で紹介済みである。

2. 在庫問題の簡単な解説

商品の在庫数を決定する方法として，[1]では次の2つの方法が紹介されている。

(a) めったに在庫切れが起きないように在庫数を決定する。つまり，商品の売り上げ個数をXとした際に，十分小さい$\varepsilon > 0$に対して$P(X \geq m) < \varepsilon$となる$m$が求める在庫数である。ここで，$X$が正規分布に従うと仮定し，次の問題を考える。

「あるコンビニで，今までは，本部から弁当が2時間に1回の割合で配達されていましたが，今度から4時間に1回になります。1度に運ぶ弁当の個数をどの程度増やせばいいでしょうか？」

2時間あたりの商品の売り上げ個数をX，その期待値をμ, 分散をσ^2とする。各2時間における売り上げ個数が独立であるとすると，4時間分の売り上げ個数Yに対して次が成り立つ。

$$E(Y) = E(X + X) = 2E(X) = 2\mu$$

$$V(Y) = V(X + X) = V(X) + V(X) = 2\sigma^2$$

従って，Yは期待値2μ, 分散$(\sqrt{2}\sigma)^2$の正規分布に従うことになる。従って，ある正の数αに対して，$P(X \geq \mu + \alpha\sigma) < \varepsilon$ならば

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2\mu + \sqrt{2}\alpha\sigma) &= P(\frac{Y - \sqrt{2}\mu}{\sqrt{2}\sigma} \geq \alpha) \\ &= P(X \geq \mu + \alpha\sigma) < \varepsilon \end{aligned}$$

となる。従って，$2\mu+\sqrt{2}\alpha\sigma<2(\mu+\alpha\sigma)$ なので，2 時間でめったに在庫切れが起きないときの在庫数の 2 倍よりも少ない在庫数でも，めったに在庫切れが起きないことになる。

(b) 商品が売れ残った場合の処理費用も考慮する。商品 1 個あたりの価格を Q，1 個あたりの処理費用を D，在庫数を S とする。商品の売り上げ個数 X に対し，利益 G を次のように定める。

$$G=\begin{cases} QS & (X\geq S) \\ QX-D(S-X) & (X<S) \end{cases}$$

この在庫数 S を定めたときの，G の期待値 $E(S)$ が最大になるような S を求める。

(b) の方法に必要な知識は期待値だけであり，(a) の方法には正規分布等の連続型確率変数の扱いが必要である。従って，本論文で紹介する授業においては，方法 (b) だけを丁寧に扱い，(a) に関しては離散型確率変数にある確率分布を与え，$P(X<m)$, $P(X+X<2m)$ を求めそれらの値を比較するだけにとどめた。

3. 授業の概要

本授業を，岐阜県教育委員会主催高校数学セミナーにて実践した。
参加生徒：高校 3 年生 1 名，高校 2 年生 3 名，高校 1 年生 28 名，中学校 3 年生 1 名
場所：岐阜市ハートフルスクエアー G
日程：2006 年 8 月 11,12 日，9:30-15:30

授業のねらい

(1) 期待値の定義の意味を理解し，それを現実的な場面に適用できる。
(2) 在庫問題のシミュレーションゲームを通して，確率に対する興味・関心をもつ。
(3) 発展的な問題を発見し，解決しようとする。

4. 授業の内容

1 日目	2 日目
在庫問題ゲーム 1 在庫問題ゲーム 2 確率（期待値など）	分散 課題追究

在庫問題ゲームの目的

在庫の意味を理解し，在庫は多ければよいとは限らないことを知る。

在庫問題ゲームの設定

ある地域に新しくコンビニが何店かでき，プレイヤーがその地域の 1 店を任されたこととする。そのコンビニの商品は弁当だけである。

<u>在庫問題ゲーム 1 について</u>

在庫問題ゲーム 1 の勝利条件

5 日間の弁当の利益の合計が最も多かった人の勝ち。

在庫問題ゲーム 1 のルール

- お金のやりとりはプレイヤーと場との間だけである。
- プレイヤーが決めるのは，弁当の在庫数だけである。
- 弁当の値段は，すべて 500 円であり，売れた弁当の利益は場からプレイヤーに支払われる。
- 弁当が売れ残ってしまった場合には，破棄費用として，弁当 1 つにつき弁当の値段の半額である 250 円を場に支払わなければならない。
- 1 日の流れは次の通りである。各プレイヤーごとにカードを 1 枚ひく。そのカードに書かれている数が自分の店でその日に売れる弁当の個数を表している。その数をもとに，売れた弁当の代金を場から受け取り，売れ残った弁当の破棄費用を場に支払う。そして，次の日に移る。
- それを 5 回（5 日間）繰り返す。
- カードには 1~10 までの数が書かれていて，それぞれが 4 枚ずつ合計 40 枚ある。

在庫問題ゲーム 2 について

在庫問題ゲーム 2 の勝利条件

5 日間の弁当の利益の合計が最も多かった人の勝ち。

在庫問題ゲーム 2 のルール

- お金のやりとりはプレイヤーと場との間だけである。
- プレイヤーは自分の店に置く 1 つ 1 つの弁当の値段を決める。ただし，自分の店に置ける弁当の個数は 5 個以下とする。
- 売れた弁当の利益は場からプレイヤーに支払われる。
- ただし，弁当が売れ残ってしまった場合には，弁当の破棄費用として売れ残った弁当の値段を合計し，その半額を場に支払わなければならない。
- 1 日の流れは次の通りである。プレイヤーから 1 人代表者を決め，代表者がカードを 1 枚ひく。(カードに書かれている数)×1000 円がその地域のお客さんがその日に使う金額である。お客さんはその地域の店の安い弁当から順に買っていく。安い弁当から買っていった後，その地域で売れ残っている弁当の中で最も安いものの値段を P_{min} 円，その値段の弁当の個数を n 個，その弁当を売っている店のプレイヤーの人数を j 人，残金を m 円とする。ここで，起こりうる場合について説明する。
  (1)$P_{min} < m$ のとき
  1 日はまだ続く。
  (2) $m < P_{min}$ のとき
  この日の弁当の販売は終了する。
  (3)$P_{min} \leq m < n \times P_{min}$のとき
  P_{min} 円と設定した全ての店に $\frac{m}{j}$ 円振り分けられる。ここで，$\frac{m}{j} = k$ とし，$\frac{k}{P_{min}}$ の整数部分の個数分，各店で弁当が売れたことにする。そして，売れ残った弁当の破棄費用を場に支払い，次の日に移る。
- それを 5 回（5 日間）繰り返す。
- カードには 1~10 までの数が書かれていて，それぞれが 4 枚ずつ合計 40 枚ある。

確率・分散の学習内容

ここでは，生徒に配布したテキストの内容とその答えを紹介する。

[期待値の定義]

$X = a_1, a_2, \cdots a_n$ となる確率 P が，次のようであるとする。

X	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
P	q_1	q_2	$\cdots$	q_n

このとき，

$$a_1q_1 + a_2q_2 + \cdots + a_nq_n$$

を X の期待値といい，$E(X)$ で表す。

[例 1]

袋の中に，赤玉 1 個，青玉 2 個，白玉 7 個の合計 10 個の玉が入っている。袋の中から 1 個取り出す。このとき，赤玉がでれば 100 円，青玉がでれば 50 円，白玉がでれば 0 円もらえる。1 回当たりにもらえる金額の平均を求めなさい。

[答]

$$100 \times \frac{1}{10} + 50 \times \frac{2}{10} + 0 \times \frac{7}{10} = 20$$

[例 2]

3 枚の硬貨を投げたときの表の枚数を X とする。このとき，X の期待値 $E(X)$ を求めなさい。

[答]

$$0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

[例 3]

あるコンビニで，2 時間で売れる弁当の個数 X の確率 P が次のようだったとする。

弁当の個数 X	1	2	3	4
確率 P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

(1) 弁当の個数の期待値を求めなさい。
(2) 弁当 1 個の値段を 500 円，弁当 1 個あたりの処分費用を 250 円とする。このとき，弁当の在庫数を 1 としたときの，利益の期待値を求めなさい。ただし，$X \geq 2$ のときは，1 個売れたあとは売り切れで，それ以上は売らないものとする。
(3) 弁当 1 個の値段を 500 円，弁当 1 個あたりの処分費用を 250 円としたときの，最も利益の期待値が大きい在庫数を求めなさい。ただし，(2) と同様，X が在庫数より大きい場合，在庫数が売れた後は売り切れで，それ以上は売らないものとする。
[答]

$$(1) 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{6} + 3 \times \frac{2}{6} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{2}$$

$$(2) 500 \times \frac{1}{6} + 500 \times \frac{2}{6} + 500 \times \frac{2}{6} + 500 \times \frac{1}{6} = 500$$

(3) 在庫が 2 個のとき

$$250 \times \frac{1}{6} + 1000 \times \frac{2}{6} + 1000 \times \frac{2}{6} + 1000 \times \frac{1}{6} = 875$$

在庫が 3 個のとき

$$0 \times \frac{1}{6} + 750 \times \frac{2}{6} + 1500 \times \frac{2}{6} + 1500 \times \frac{1}{6} = 1000$$

在庫が 4 個のとき

$$-250 \times \frac{1}{6} + 500 \times \frac{2}{6} + 1250 \times \frac{2}{6} + 2000 \times \frac{1}{6} = 875$$

従って，最も利益の期待値が大きい在庫数は 3 個である。
[独立の定義]
サイコロを 2 回投げるとき，1 回目に出る目の数と，2 回目に出る目の数は無関係である。このようなとき，1 回目に出る目の数と 2 回目に出る目の数は独立であるという。
[確率の定義]
サイコロを 1 回投げるとき，出た目の数を X とする。このとき，$X = k$ となる確率を $P(X = k)$ と表す。このように，あることがらに対して，$X = k$ となる確率を $P(X = k)$ と書くことにする。
[例 4]
サイコロを 2 回投げるとき，1 回目に出た目の数と 2 回目に出た目の数の和を X とする。このとき，$P(X = 4), P(X = 7)$ を求めよ。
[答]

$$P(X = 4) = \frac{1}{12}, P(X = 7) = \frac{1}{6}$$

[独立の法則]
サイコロを 2 回投げるときの，1 回目に出た目の数を X，2 回目に出た目の数を Y とする。このとき，X と Y が独立ならば，

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j)$$

が成り立つ。
[例 5]
あるコンビニで，2 時間で売れる弁当の個数の確率 P は次のように分かっているものとする。そして，2 時間ごとに売れる弁当の数は独立であるとする。また，弁当の賞味期限を 4 時間以上とする。

弁当の個数	1	2	3	4
確率 P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

(1) 4 時間で売れる弁当の個数の確率を求めなさい。
(2) 4 時間で売れる弁当の個数の期待値を求めなさい。
[答]
(1)

弁当の個数	2	3	4	5	6	7	8
確率 P	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

(2) $2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{4}{36}+4\times\frac{8}{36}+5\times\frac{10}{36}+6\times\frac{8}{36}+7\times\frac{4}{36}+8\times\frac{1}{36}=5$

[例 6]

あるコンビニで，2 時間で売れる弁当の個数の確率 P が次のようだったとする。そして，2 時間ごとに売れる弁当の数は独立であるとする。また，弁当の賞味期限を 4 時間以上とする。

弁当の個数	1	2	3	4
確率 P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

弁当 1 個の値段を 500 円，弁当 1 個あたりの処分費用を 250 円とする。ここで，販売時間を 4 時間としたとき，最も利益の期待値が大きい在庫数を求めなさい。

[答]

在庫が 2 個のとき

$1000\times\frac{1}{36}+1000\times\frac{4}{36}+1000\times\frac{8}{36}+1000\times\frac{10}{36}+1000\times\frac{8}{36}+1000\times\frac{4}{36}+1000\times\frac{1}{36}=\frac{36000}{36}$

在庫が 3 個のとき

$750\times\frac{1}{36}+1500\times\frac{4}{36}+1500\times\frac{8}{36}+1500\times\frac{10}{36}+1500\times\frac{8}{36}+1500\times\frac{4}{36}+1500\times\frac{1}{36}=\frac{53250}{36}$

在庫が 4 個のとき

$500\times\frac{1}{36}+1250\times\frac{4}{36}+2000\times\frac{8}{36}+2000\times\frac{10}{36}+2000\times\frac{8}{36}+2000\times\frac{4}{36}+2000\times\frac{1}{36}=\frac{67500}{36}$

在庫が 5 個のとき

$250\times\frac{1}{36}+1000\times\frac{4}{36}+1750\times\frac{8}{36}+2500\times\frac{10}{36}+2500\times\frac{8}{36}+2500\times\frac{4}{36}+2500\times\frac{1}{36}=\frac{75750}{36}$

在庫が 6 個のとき

$0\times\frac{1}{36}+750\times\frac{4}{36}+1500\times\frac{8}{36}+2250\times\frac{10}{36}+3000\times\frac{8}{36}+3000\times\frac{4}{36}+3000\times\frac{1}{36}=\frac{76500}{36}$

在庫が 7 個のとき

$-250\times\frac{1}{36}+500\times\frac{4}{36}+1250\times\frac{8}{36}+2000\times\frac{10}{36}+2750\times\frac{8}{36}+3500\times\frac{4}{36}+3500\times\frac{1}{36}=\frac{71250}{36}$

在庫が 8 個のとき

$-500\times\frac{1}{36}+250\times\frac{4}{36}+1000\times\frac{8}{36}+1750\times\frac{10}{36}+2500\times\frac{8}{36}+3250\times\frac{4}{36}+4000\times\frac{1}{36}=\frac{63000}{36}$

以上より，在庫が 6 個のときが最も利益の大きい期待値である。

[例 7]

コンビニ A とコンビニ B がある。2 時間で売れる弁当の個数の確率 P が次のようにわかっており，2 時間でコンビニ A の売れる弁当の個数を X, コンビニ B の弁当の売れる個数を Y とするとき，$E(X), E(Y), V(X), V(Y)$ を求めなさい。

コンビニ A				
弁当の個数	1	2	3	4
確率 P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

コンビニ B				
弁当の個数	1	2	3	4
確率 P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

[答]

$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{6}+3\times\frac{2}{6}+4\times\frac{1}{6}=\frac{5}{2}$

$E(Y)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

$V(X)=\frac{9}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{6}+\frac{9}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$

$V(Y)=\frac{9}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

[例 8]

$X=a_1,a_2,\cdots a_n$ となる確率 P が，次のようであるとする。

X	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
P	q_1	q_2	$\cdots$	q_n

このとき，$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ となることを示せ。

[答]

$$\begin{aligned}V(X)&=(a_1-m)^2q_1+(a_2-m)^2q_2+\cdots\\&\qquad+(a_n-m)^2q_n\\&=a_1^2q_1-2a_1mq_1+m^2q_1+a_2^2q_2-2a_2mq_2\\&\qquad+m^2q_2+\cdots+a_n^2q_n-2a_nmq_n+m^2q_n\\&=a_1^2q_1+a_2^2q_2+\cdots+a_n^2q_n\\&\qquad-2m(a_1q_1+a_2q_2+\cdots+a_nq_n)+m^2\\&=E(X^2)-E(X)^2\end{aligned}$$

[例 9]

コンビニ A とコンビニ B があって，2 時間で弁当の売れる個数の確率 P が次のように分かっているとする。そして，2 時間ごとに売れる弁当の数は独立であるとする。また，弁当の賞味期限を 4 時間以上とする。コンビニ A で 4 時間に売れる弁当の個数を W, コンビニ B で 4 時間に売れる弁当の個数を Z とする。

コンビニ A				
弁当の個数	1	2	3	4
確率 P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

コンビニ B				
弁当の個数	1	2	3	4
確率 P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(1) W, Z の確率を求めなさい。
(2) W, Z の分散を求めなさい。
(3) 2 時間の在庫を 3 個にしたとき，在庫切れになる確率をコンビニ A の場合とコンビニ B の場合とをそれぞれ求めなさい。
(4) 4 時間の在庫を 6 個にしたとき，在庫切れになる確率をコンビニ A の場合とコンビニ B の場合とをそれぞれ求めなさい。

[答]

(1)

コンビニ A							
弁当の個数	2	3	4	5	6	7	8
確率 P	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$

コンビニ B							
弁当の個数	2	3	4	5	6	7	8
確率 P	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

(2)

$$E(W)=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{4}{36}+4\times\frac{8}{36}+5\times\frac{10}{36}+6\times\frac{8}{36}+7\times\frac{4}{36}+8\times\frac{1}{36}=5$$

$$E(Z)=2\times\frac{1}{16}+3\times\frac{2}{16}+4\times\frac{3}{16}+5\times\frac{4}{16}+6\times\frac{3}{16}+7\times\frac{2}{16}+8\times\frac{1}{16}=5$$

$$V(W)=9\times\frac{1}{36}+4\times\frac{4}{36}+1\times\frac{8}{36}+0\times\frac{10}{36}+1\times\frac{8}{36}+4\times\frac{4}{36}+9\times\frac{1}{36}=\frac{11}{6}$$

$$V(Z)=9\times\frac{1}{16}+4\times\frac{2}{16}+1\times\frac{3}{16}+0\times\frac{4}{16}+1\times\frac{3}{16}+4\times\frac{2}{16}+9\times\frac{1}{16}=\frac{5}{2}$$

(3) コンビニ A の場合：$1-\frac{1}{36}-\frac{4}{36}=\frac{31}{36}$

コンビニBの場合：$1-\frac{1}{16}-\frac{2}{16}=\frac{13}{16}$

(4) コンビニAの場合：$\frac{4}{36}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36}$

コンビニBの場合：$\frac{2}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$

5. 実践結果

在庫ゲーム1について

生徒を4人ずつのグループにわけ，各班に学生を配置し，在庫ゲーム1を2回行った。1回目は練習としてゲームを行ったが，どの生徒も在庫数をいくつにしたらいいのか戸惑っていた。しかし2回目では，1回目の結果を生かしながら，在庫数を設定し，熱心にゲームに取り組んでいた。

ここで，在庫ゲーム1の利益の期待値を述べる。

在庫が1個のとき

$$500\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}=500$$

在庫が2個のとき

$$250\times\frac{1}{10}+1000\times\frac{1}{10}+1000\times\frac{1}{10}+1000\times\frac{1}{10}+1000\times\frac{1}{10}+1000\times\frac{1}{10}+1000\times\frac{1}{10}+1000\times\frac{1}{10}+1000\times\frac{1}{10}+1000\times\frac{1}{10}=925$$

在庫が3個のとき

$$0\times\frac{1}{10}+750\times\frac{1}{10}+1500\times\frac{1}{10}+1500\times\frac{1}{10}+1500\times\frac{1}{10}+1500\times\frac{1}{10}+1500\times\frac{1}{10}+1500\times\frac{1}{10}+1500\times\frac{1}{10}+1500\times\frac{1}{10}=1275$$

在庫が4個のとき

$$-250\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}+1250\times\frac{1}{10}+2000\times\frac{1}{10}+2000\times\frac{1}{10}+2000\times\frac{1}{10}+2000\times\frac{1}{10}+2000\times\frac{1}{10}+2000\times\frac{1}{10}+2000\times\frac{1}{10}=1550$$

在庫が5個のとき

$$-500\times\frac{1}{10}+250\times\frac{1}{10}+1000\times\frac{1}{10}+1750\times\frac{1}{10}+2500\times\frac{1}{10}+2500\times\frac{1}{10}+2500\times\frac{1}{10}+2500\times\frac{1}{10}+2500\times\frac{1}{10}+2500\times\frac{1}{10}=1750$$

在庫が6個のとき

$$-750\times\frac{1}{10}+0\times\frac{1}{10}+750\times\frac{1}{10}+1500\times\frac{1}{10}+2250\times\frac{1}{10}+3000\times\frac{1}{10}+3000\times\frac{1}{10}+3000\times\frac{1}{10}+3000\times\frac{1}{10}+3000\times\frac{1}{10}=1875$$

在庫が7個のとき

$$-1000\times\frac{1}{10}-250\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}+1250\times\frac{1}{10}+2000\times\frac{1}{10}+2750\times\frac{1}{10}+3500\times\frac{1}{10}+3500\times\frac{1}{10}+3500\times\frac{1}{10}+3500\times\frac{1}{10}=1925$$

在庫が8個のとき

$$-1250\times\frac{1}{10}-500\times\frac{1}{10}+250\times\frac{1}{10}+1000\times\frac{1}{10}+1750\times\frac{1}{10}+2500\times\frac{1}{10}+3250\times\frac{1}{10}+4000\times\frac{1}{10}+4000\times\frac{1}{10}+4000\times\frac{1}{10}=1900$$

在庫が9個のとき

$$-1500\times\frac{1}{10}-750\times\frac{1}{10}+0\times\frac{1}{10}+750\times\frac{1}{10}+1500\times\frac{1}{10}+2250\times\frac{1}{10}+3000\times\frac{1}{10}+3750\times\frac{1}{10}+4500\times\frac{1}{10}+4500\times\frac{1}{10}=1800$$

在庫が10個のとき

$$-1750\times\frac{1}{10}-1000\times\frac{1}{10}-250\times\frac{1}{10}+500\times\frac{1}{10}$$

$$+1250\times\frac{1}{10}+2000\times\frac{1}{10}+2750\times\frac{1}{10}+3500\times\frac{1}{10}$$
$$+4250\times\frac{1}{10}+5000\times\frac{1}{10}=1625$$

従って，7個が最適な在庫量であることがわかる。

在庫ゲーム2について

在庫ゲーム1と同じグループで在庫ゲーム2も行った。ルールが複雑であるため，学生が補助しながらゲームを行っていった。最初は，ルールや勝ち方が理解できていなかったこともあり，適当に値段設定を行っていたが，回を重ねる度に，弁当1つ1つの値段をいくらにしようかを深く考えていた。

各自の課題について

期待値，分散を学んだ後，各自で在庫問題に関する課題を考え，それに取り組んだ。ここでは，生徒が考えた課題を目的ごとに紹介する。

(最も利益の期待値が大きい在庫数を求める問題)

(1) あるコンビニで，2時間で売れる弁当の個数 X の確率 P を次のように定め，弁当1個の値段を498円，処分費用を68円とするときの最も利益の期待値が大きい在庫数を求めよ。

(2) 2時間で売れる5円チョコの個数の確率を次のように定める。1個1000円の5円チョコを売ることにする。ただし，4時間は溶けないものとし，処分費用は600円とする。このとき，5円チョコの在庫は何個がいいか。

(3) 1時間で売れるうまい棒の本数の確率を次のように定める。1本500円のうまい棒（フカヒレ味）を売ることにする。処分費用は100円かかるとする。在庫の数を2∼8にして，2時間で売る場合，利益の期待値が最も大きいのは在庫が何本のときか。

(4) 2時間で売れる高級ガリガリ君の本数の売れる確率を次のように定める。1本200円の高級ガリガリ君の処理費用を50円とするとき，何本を店におくべきか。

(5) 弁当1個の値段を425円，処分費用を100円とする。販売時間を3時間とし，3時間で売れる弁当の個数を次のように定めるとき，3時間で最も利益の期待値が大きい在庫数を求めなさい。

(6) 弁当1個500円とし，処分費用が50円とする。また，2時間で売れる弁当の個数 X の確率 P が次のようになったとき，在庫数がいくつのときが最も利益があるか。また，そのときの利益の期待値を求めよ。

(7) メロンパンが売れる個数とその確率を次のように定める。1個100円のメロンパンで，処分費用が40円としたとき，利益の期待値が最大となる在庫の個数を求めなさい。

(8) 弁当が売れる個数とその確率を次のように定める。1個の弁当の値段を300円，処分費用を10円としたとき最も期待値の大きい在庫数を求めよ。

(9) 弁当が売れる個数 X とその確率 P を次のように定める。弁当1個の値段を500円，弁当1個あたりの処分費用を200円としたときの最も利益の期待値が大きい在庫数を求めなさい。

(10) あるコンビニで，弁当1個の値段が300円で，弁当1個の処分費用は20円とする。また，人件費は合計100円とし，弁当1個を処分したとき，人件費が20円減るものとする。2時間で売れる弁当の個数が次のようであったとき，2時間の最も利益の多い期待値の在庫数を求めなさい。

(11) あるコンビニで，1時間で売れる弁当の個数の確率 P が次のようであったとする。そして，1時間ごとに売れる弁当の個数は独立で，賞味期限は3時間以上とする。弁当1個

1000円，処分費用を200円とするとき，3時間で最も利益の期待値が大きい在庫数を求めよ。また，処分費用を100円としたときの最も利益の期待値が大きい在庫数を求めよ。

(12) あるコンビニで2時間で売れる弁当の個数Xの確率Pを次のようであったとする。在庫数を1∼6とし，弁当の値段を700円とする。処理費用は在庫1つ増えるにつれ20円高くなる（始めは50円であるとする）。また，弁当の賞味期限は4時間とし，2時間たつと500円になり，4時間たった弁当は処理されるとする。このとき，最も利益の期待値が大きい在庫数を求めよ。

(13) 4時間で売れる弁当の個数Xの確率Pを次のように定める。4時間で弁当1個100円，処理費用は1個20円，在庫切れになったら，謝罪費として客に50円支払うとき，何個仕入れるべきか。

(期待値，分散，処理費用などを求める問題)

(14) 弁当が売れる個数Xとその確率Pを次のように定める。弁当1個の値段を500円，弁当1個あたりの処分費用を200円とする。このとき，弁当の在庫数を1としたときの利益の期待値を求めよ。

(15) 弁当1個の値段を800円，弁当1個あたりの処分費用を100円とする。2時間で売れる弁当の個数Xの確率Pが次のようだったとするとき，弁当の個数の期待値，最も利益の期待値が大きい在庫数，4時間で売れる弁当の個数の確率，4時間で売れる弁当の個数の期待値を求めよ。また，弁当1個あたりの処分費用をx円とする。在庫数が4個のときの利益の期待値が1760円であったとき，処分費用はいくらか求めよ。

(16) 2時間で売れる弁当の個数Xの確率Pを次のように定める。弁当1個500円とし，処分費用がx円とする。在庫が3個のとき期待値が$\dfrac{3050}{3}$であるとき，xはいくつか求めよ。

(17) 2時間で売れる高級ガリガリ君の本数の売れる確率を次のように定める。1本200円の高級ガリガリ君の処理費用をx円とするとき，それぞれの期待値を求めよ。

(18) あるコンビニで2時間で売れる弁当の個数Xの確率Pを次のようであったとする。在庫数を1∼6とし，弁当の値段を700円とする。処理費用は在庫1つ増えるにつれ20円高くなる（始めは50円であるとする）。また，弁当の賞味期限は4時間とし，2時間たつと500円になり，4時間たった弁当は処理されるとする。4時間に1回配達されるとするとき，0∼2時間のときの売上の期待値，4時間を過ぎたときの期待値を求めよ。

(比較の問題)

(19) コンビニスクエアKとコンビニビッグストップがあって，4時間で1つ300円，処分費用が30円のサンドウィッチの売れる個数の確率Pが次のようにわかっているとする。4時間で売れるサンドウィッチは独立であるとするとき，利益の期待値の最大値が大きいコンビニはどちらか。

(20) セレブ御用達のコンビニがあり，1時間で売れる弁当の個数の確率Pが次のようにわかっている。また，弁当1個の値段を17万6000円とし，在庫のあまりはなく，すべて売り切れるとする。販売時間は3日間限定とする。一方，庶民的なコンビニがあり，10分間で売れる弁当の個数の確率Pが次のようにわかっている。また，弁当1個の値段を180円とし，在庫のあまりはなく，すべて売り切れるとする。販売時間は365日とする。このとき，それぞれの期待値，分散，年間の利益の期待値を求めなさい。

(21) コンビニAがあり，コンビニAの弁当が売れる確率は時間帯によって変わるものとす

る。さらに，弁当の配達される数も時間帯によって変わるとする。また，平日と休日では，コンビニAの弁当が売れる確率と配達される数が変わるとする。そして，弁当の残りは繰り越すとし，1日で完売しない場合は処分し，費用は考えないとする。それぞれを次のように定めたとき，平日5日間と休日2日間の売れた弁当の個数の差を a を使って表せ。

(範囲を求める問題)

(22) あるコンビニで，2時間で売れる弁当の個数 X の確率 P を次のように定め，弁当1個の値段を498円，処分費用を x 円とし，在庫数が増えるにつれて期待値も増えていったとき，x の範囲を求めよ。

(23) 2時間で売れる5円チョコの個数の確率を次のように定める。1個1000円の5円チョコを売ることにする。ただし，4時間は溶けないものとし，処分費用は x 円とする。このとき，それぞれの利益の期待値を求めよ。また，4個で売るほうが3個で売るより期待値が高いとき，処理費用の範囲を求めよ。

(24) 弁当1個の値段を x 円，弁当1個あたりの処分費用を50円とする。販売時間を2時間とし，2時間で売れる弁当の個数の確率を次のように定める。最も利益の大きい在庫数が3個であったとき1個の値段の範囲を求めよ。

(25) 弁当1個の値段を x 円，弁当1個あたりの処分費用を50円とする。販売時間を2時間とし，最も利益の期待値が大きい在庫数が4個であったとき，弁当1個の値段の範囲を求めよ。

ここで，生徒が作成した問題の分析を行う。
(1)∼(9):元の問題と状況の設定や数値を変えた。
(10):人件費という新たな変数を取り入れた。
(11):元の問題では2回繰り返していたものを3回に増やした。
(12):1個当たりの処分費用が処分する弁当の個数に依存するようにした。
(13):在庫切れの場合も謝罪費という負の効果が生じるようにした。
(14):在庫数を定めたときの期待値を求める問題にした。
(15),(16):在庫数，期待値から処分費用を求める問題にした。
(17):処理費用を x 円にしたときの期待値を x で表す問題にした。
(18):1個当たりの処理費用が処分する弁当の個数に依存し，弁当の価格も時間によって変化するようにした。
(19)∼(21):確率分布の違う2つの店を考え，どちらの利益の期待値が大きいかを比較した。
(22),(23):ある条件を満たす処分費用の範囲を求めるようにした。
(24),(25):ある条件を満たす弁当1個の値段の範囲を求めるようにした。

アンケート結果

(1) この授業で難しいと思ったところはどこですか。

- 分散の問題がまだ習っていないので難しかった。
- 計算の量が多くて大変だった。
- 自分で問題を設定して，それを解くことが難しかった。

(2) 期待値や分散を使って，調べたいことは何ですか。

- 電車やバスの利益の期待値
- 宝くじの期待値
- マックとモスバーガーの期待値の差

(3) 2日間を通しての感想。

- この2日間で，少し確率に対する苦手意識がなくなった気がしました。それから，確率というものが自分たちの身近にいろいろと使われていることを実感することができ，確率にかなり興味を持てた。

- 高校で習うことを使って，現実的な問題を解くことが楽しく，数学に興味を持ちました。今までは，数学を学んでも役に立たないと思っていましたが，そうでもないと思いました。セミナーに参加してよかったと思いました。
- 今まで考えもしなかったことに触れられて，また１つ自分の視野が広がった気がした。期待値，分散はまだ習っていないけど，とても親切に教えてもらい，問題が自分で解けたときの感動も大きかったです。
- いつもの数学とは違って，身近なコンビニの話だったのでよかった。実用できる数学はとても面白いと思う。これからもそういった問題を解いていけば楽しいと思うし，身近にどんな数学が利用されているか知りたいと思った。

6. 考察及び今後の課題ねらいの達成度

(1) 期待値の定義の意味を理解し，それを現実的な場面に適用できる。

まだ期待値を習っていない生徒もいたが，そのような生徒達も問題練習を通してしっかり学習できたと考えている。なぜならば，前節でも紹介したように，自ら作った現実的な在庫量の問題において，期待値を積極的に使い，問題解決に取り組んでいたからである。このような生徒の姿から，このねらいについては十分に達成されたと考える。

(2) 在庫問題のシミュレーションゲームを通して，確率に対する興味・関心をもつ。

在庫問題ゲーム１では，生徒は活動していく中で自分の店の在庫数を，利益の期待値が最大となる在庫数に設定していく姿が見られた。在庫問題ゲーム２では，収入を得るために，他の生徒が弁当の値段をいくらに設定するかを予想しながら自分の店の弁当の値段を設定していた。このような姿から，生徒達はシミュレーションゲームに熱心に取り組んでいたことがわかる。また，生徒の感想の中には，確率に興味を持てたという感想も多かったことから，このねらいについては十分に達成されたと考える。

(3) 発展的な問題を発見し，解決しようとする。

前節で紹介したように，どの生徒も自分で疑問に思ったことを問題にすることができていた。それも題材が身近であったことやシミュレーションゲームを経験したことが効果的に作用したと考えている。生徒が作った問題も，文字を使って一般化したものや謝罪費など数学的に複雑になるように設定を変更したもの，逆から考えるようにしたものなど，実に各様であった。このことから，単に問題を作れるだけでなく，現実性を伴う問題を作れるという視点からも，シミュレーションの導入は有効であったと考える。

今後の課題

今回の実践を通して，シミュレーション的なゲームは，数学の有用性の伝達に非常に有効であると実感したので，今後も簡単にでき，数学的考察を必要とするシミュレーションゲームを開発していきたい。また，生徒自身に課題を作らせることは，課題意識，問題解決の意欲などの向上の効果あると感じたので，生徒自身が課題設定ができる授業の開発に取り組んでいきたい。

引用文献

[1] 依田浩，1981，工学系のための OR，朝倉書店.

[2] 大日本図書,2006, 新版中学校数学 2.

[3] 数研出版,2005, 数学 A.

[4] 数研出版,2005, 数学 C.

[5] 愛木豊彦，2005, 保険の数理を題材とする高校生用教材の提案と実践，2005 年度数学教育学会秋季例会発表論文集, 90-92.

[6] 愛木豊彦，井上春奈，2004, 統計処理に関連した中学校における授業実践, 2004 年度数学教育学会秋季例会発表論文集,107-109.
[7] 愛木豊彦，井上春奈，2004, 統計処理に関連した教材の開発とその実践, 岐阜数学教育研究，第 3 号, (2004)78-83.
[8] 愛木豊彦，岩田和也,2006, 統計の有用性を体感する教材の開発と実践,2006 年度秋季例会発表論文集,106-108.