岐阜数学教育研究
2005,Vol.4, 47-56

具体的操作活動を取り入れた幾何教材の開発

川口真美[1]，愛木豊彦[2]

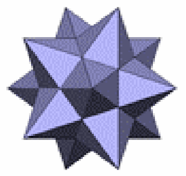
学校教育における数学の授業は，抽象的に事象を取り扱うことが多い。しかし，具体的に事象を操作する活動をすることによって，数学の楽しさを感じることができるのだと考える。また，数学のおもしろさの一つは，既習事項に帰着させて考えれば，未知な問題でも解くことができることである。既習内容をもとに，問題を解決していくことのよさを実際に体験することで，数学の楽しさと有用性を感じることができると考えた。本論文では，立体を用いた教材の提案と，中学生を対象とした授業実践の結果について報告する。

＜キーワード＞立体，既習内容，小星形十二面体，作図

1. 序論

中学生になると，数学の立体の授業において，実際に立体の模型を手にとって学習を進めることは少なくなる。また，栃木県で行われた学習状況調査 [1] などでも示されているように，空間図形の分野を苦手とする子どもは少なくない。

そこで，立体を手にとったり，展開図をかいたり，組み立てたりする活動を取り入れた授業を開発することとした。題材は,「小星形十二面体」（写真１）[2] である。



（写真１）

この立体を題材に取り上げた理由は，見た目のかわいさから親しみやすく，子どもたちが興味をもって立体の学習を進めることができると考えたからである。空間図形の苦手意識を軽減させるためには，立体に対して興味をもたせることが効果的だと考えた。また，学校教育では学習しない立体なので，子どもたちにとってはおそらく初めて見る立体であり，試行錯誤しながら立体を理解し，正多面体や柱・すいなどの既習の立体と関連させながら学習を進めていける教材であると思う。既習の内容に帰着して考えることは，数学を学ぶ上でもとても大切な考え方となるので，そのよさを実感できるような授業展開を目指すこととした。

2. 教材について

(1) 教材の説明

授業で取り扱った小星形十二面体という立体は，正十二面体の各面に，正五角すい（以下，この正五角すいをとげと呼ぶ）をつけたものである。ここで提案する授業において，子どもたちは，この小星形十二面体を画用紙で作成する。小星形十二面体は辺の比率が決まっていて（図５），正確に作ろうとすると，36° の作図が必要となり，これは簡単ではない。したがって，授業では小星形十二面体にはこだわらず，とげの高さを自由に設定してもよいこととした。それに伴って，小星形十

[1]岐阜大学教育学部
[2]岐阜大学教育学部，科学研究費（特定領域研究），課題番号　17011034

二面体という用語を用いず,「星形の立体」と表現することとした。

星形の立体の模型は，五角すいの底面がなくても作ることができる。したがって，とげの展開図をかくときに正五角形を作図する必要がなく，二等辺三角形を作図するだけで星形の立体を作ることが可能である。

また，子どもたちは，中学１年生で三角すいや円すいの展開図は学習しているが，五角すいについては学習していないので，五角すいの展開図をかく作業は発展的な内容となる。しかし，既習の内容（円すいの展開図）に帰着して考えれば容易にかくことができる。

さらに，この星形の立体の頂点を線で結ぶと，正二十面体になる。このことは正二十面体の頂点の数が１２であることからも容易に説明ができる。実際に模型を作ることで，立体の特徴に対する理解を深め，数学の「つながり」のおもしろさを感じてもらえるとよいと考えた。

(2) 授業のねらい

この授業のねらいは以下の３つである。

自分の手で実際に星形の立体を作ることで，立体をじっくり観察し，考察する力を身につけること

立体を扱うことの楽しさを知ること

知らないことがらでも既習の内容に帰着して考えることで，同じように考えることができることを実感すること

①については，模型の観察を通して，とげの数や，辺・頂点・面の数，とげの形など，星形の立体の特徴をとらえることをねらいとしている。

②については，模型作りの活動を通して楽しく立体に触れることと，第２節 (1) で述べた星形の立体のおもしろさを感じることをねらいとしている。

③については，第２節 (2) でも述べたように未知の立体でも既習の内容に帰着して考えることによって理解することができることを実感することがねらいである。

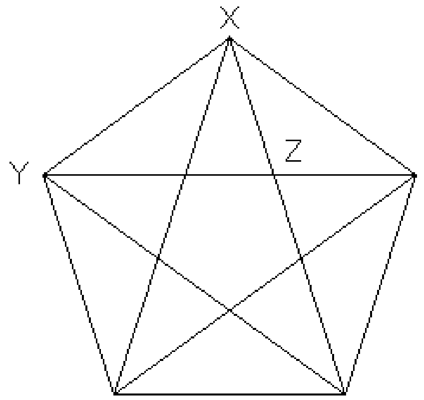
(3) 教材の数学的解釈

小星形十二面体についている五角すいの展開図は，正十角形を半分にしたものである。この小星形十二面体のとげの部分は，一平面になる。

以下，これを証明する。

準備 1.

まず，正五角形に関する性質を示す。



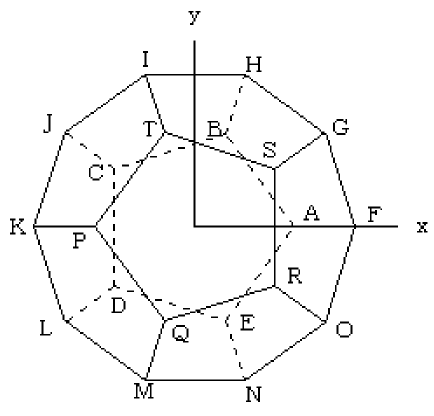
（図１）

上図において，

$$XY : XZ = 1 : \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

また，図１から，$\cos 36^\circ = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$ も求められる。

次に，下図のような正十二面体の各頂点の座標を求める。

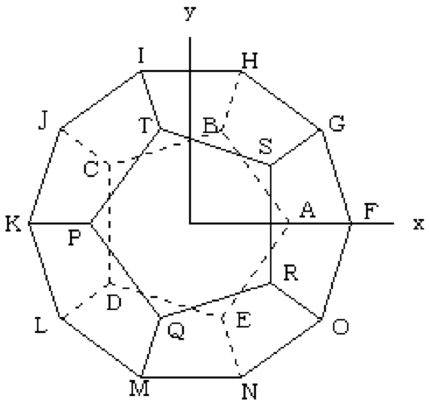


（図２）

正五角形 ABCDE を，xy 平面上にあり，その中心（外接円の中心）が原点にある面とす

る。点 A の座標を $A(1,0,0)$ とする。このとき，点 B，C，D，E の座標は,

$B(\cos 72^\circ, \sin 72^\circ, 0)$
$C(-\cos 36^\circ, \sin 36^\circ, 0)$
$D(-\cos 36^\circ, -\sin 36^\circ, 0)$
$E(\cos 72^\circ, \sin 72^\circ, 0)$



（図３）

図３は，正十二面体を z 軸方向に見た射影図である。

O’を正五角形 ABCDE の外接円の中心とすると，図３において，O’J ＝ O’K ＝O’L であり，外周は正十角形である。

準備 2.

CD の中点を U とする。このとき,

$$\mathrm{AU} : \mathrm{UK} = \sqrt{5} : 1 \qquad (1)$$

を示す。

この図において，O’F ＝ O’G ＝ O’H であり，外周は正十角形である。UK の長さを求める。LJL と UK の交点を V，BE と AU の交点を W とすると,

$$\mathrm{EW} = \mathrm{VL}$$

ここで，O’E ＝1, EW ＝ $\sin 72^\circ$ なので, VL ＝ $\sin 72^\circ$. また，図形の対称性により, O’，D，L は図３において一直線上にある。

△ O’LV おいて，$\angle \mathrm{LO'V} = 36^\circ$，V L ＝ $\sin 72^\circ$ なので,

$$\mathrm{O'L} \sin 36^\circ = \mathrm{VL} = \sin 72^\circ$$

$$\mathrm{O'L} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

O’L ＝ O’K より，O’K ＝ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

一方，O’U ＝ O’D $\times \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

UK ＝ O’K − O’U ＝ $\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$

また,

AU ＝ O’A ＋ O’M ＝ $1 + \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{\sqrt{5}+5}{4}$

ゆえに,

AU : UK ＝ $\sqrt{5}$: 1

準備 3.

正十二面体の各頂点の座標を求める。(1) より，点 A，C，K の x 座標をそれぞれ x_A，x_C，x_K とすると,

$$(x_A - x_C) : (x_C - x_K) = \sqrt{5} : 1,$$

$$1 + \cos 36^\circ = \sqrt{5}(-\cos 36^\circ - x_K),$$

$$x_K = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \mathrm{CD} \\ &= 2\,\mathrm{UD} \\ &= 2\mathrm{O'D}\sin 36^\circ \\ &= 2\sin 36^\circ \end{aligned}$$

CDLKJ は正五角形 ABCDE を CD を軸にして回転した位置にあるので，点 J の y 座標は点 B の y 座標と同じである。

また，点 J の x 座標を x_J とすると，$x_J < 0$

$$|x_J| = \mathrm{O'V},$$

$$\mathrm{O'V} = \mathrm{O'L}\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

以下，簡単のため，$\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ とおくと,

$$\mathrm{O'V} = \frac{1}{2}\alpha^2$$

J の z 座標を z_J とおくと，CJ = AB なので,

$$(\cos 36^\circ - \frac{1}{2}\alpha^2)^2 + (\sin 72^\circ - \sin 36^\circ)^2 + z^2 = 1$$

これを解くと，$z>0$ より，$z=1$
したがって，F，H，J，L，N の座標が定まる。
F:$(\alpha,0,1)$
H:$(\alpha\cos 72^\circ,\alpha\sin 72^\circ,1)$
J:$(-\alpha\cos 72^\circ,\alpha\sin 36^\circ,1)$
L:$(-\alpha\cos 72^\circ,-\alpha\sin 36^\circ,1)$
N:$(\alpha\cos 72^\circ,-\alpha\sin 72^\circ,1)$

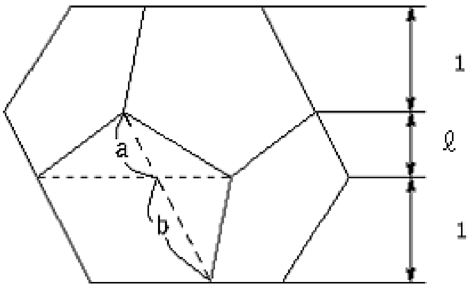


図４

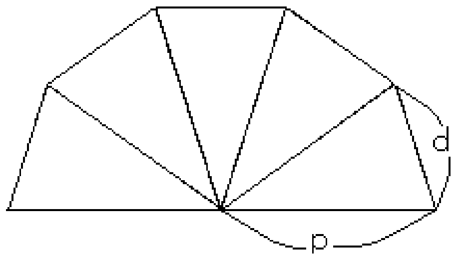
図４は正十二面体を xy 平面に平行な方向からみた射影図である。ここで，

$$\ell:1=a:b$$

準備 1. より $a:b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}:1$
よって $\ell=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
よって，G，I，K，M，O の z 座標はすべて，

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1=\alpha$$

である。これより G，I，K，M，O の座標は次のようになる。
G:$(\alpha\cos 36^\circ,\alpha\sin 36^\circ,\alpha)$
I:$(-\alpha\cos 72^\circ,\alpha\sin 72^\circ,\alpha)$
K:$(-\alpha,0,\alpha)$
M:$(-\alpha\cos 72^\circ,-\alpha\sin 72^\circ,\alpha)$
O:$(\alpha\cos 36^\circ,-\alpha\sin 36^\circ,\alpha)$
図形の対称性により，P，Q，R，S，T の z 座標はすべて $\alpha+1$ である。したがって，その座標は，
P:$(-1,0,\alpha+1)$
Q:$(-\cos 72^\circ,-\sin 72^\circ,\alpha+1)$
R:$(\cos 36^\circ,-\sin 36^\circ,\alpha+1)$
S:$(\cos 36^\circ,\sin 36^\circ,\alpha+1)$
T:$(-\cos 72^\circ,\sin 72^\circ,\alpha+1)$
準備 4.
正五角すい（とげ）の高さを求める。



（図５）

小星形十二面体のとげである五角すいの展開図は，図５のように，頂角を 36° とする二等辺三角形５個からなる。その二等辺三角形の底辺の長さは，AB に等しいので，

$$d=2\sin 36^\circ$$

図５における p の値を余弦定理から求める。

$$(2\sin 36^\circ)^2=p^2+p^2-2\cdot p\cdot\cos 36^\circ,$$

$$4\sin^2 36^\circ=2p^2-2p^2\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$$2p^2-\frac{\sqrt{5}+1}{2}p^2=4\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{8},$$

$$p^2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{5-\sqrt{5}}{2},$$

$$\begin{aligned}p^2&=\frac{5-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{2}{3-\sqrt{5}}\\&=\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\\&=\frac{5+\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

したがって，正五角すい（とげ）の高さを h とすると，

$$1+h^2=p^2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ h &= \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha \end{aligned}$$

（結論の証明）

正五角形 PQRST についている正五角すいの頂点を W とすると，正五角すいの高さが α なので，W の座標は，W$(0,0,2\alpha+1)$

よって，

$$\overrightarrow{PW} = (0,0,2\alpha+1)-(-1,0,\alpha+1) = (1,0,\alpha)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{KP} &= (-1,0,\alpha+1)-(-\alpha,0,\alpha) \\ &= (-1+\alpha,0,1) \\ &= (\frac{\sqrt{5}-1}{2},0,1) \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}(1,0,\alpha) \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{PW} \end{aligned}$$

したがって，W，P，K は一直線上にある。

これはどの点にも言えるので，小星形十二面体のとげの部分は同一平面上にある。

3. 授業実践について

(1) 授業内容

この教材を以下の要領で実践した。

講座名 「きらきら光るお星さま」

実施日 平成 17 年 11 月 11 日，17 日

場所 岐阜市立青山中学校

参加者 中学 3 年生（13 人）

授業は選択教科「数学」の時間をお借りして行った。授業の流れは次の通りである。

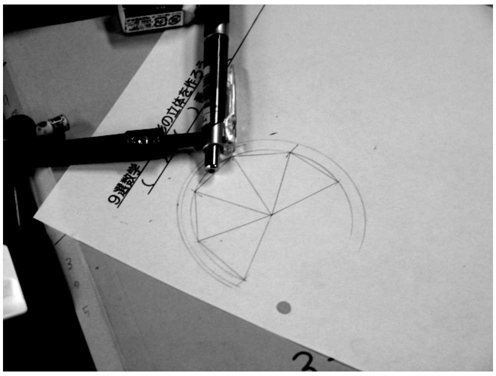
●１時間目

まず，子どもたちに星形の立体の模型を配布し，立体の特徴を挙げてもらう。このとき出てきた特徴の中から，とげが 12 個ついていること，とげの形が正五角すいになっていることをおさえる。

（写真２）

写真２は星型の立体を観察する子どもの様子である。

そして，下書き用の紙で自由に長さを設定して１つとげを作ってみて，その大きさでいいと思ったら，本番用の画用紙にとげの展開図を作図する。それを印刷機で画用紙１２枚に印刷をする。



（写真３）

写真３は，子どもがかいた展開図の１例である。

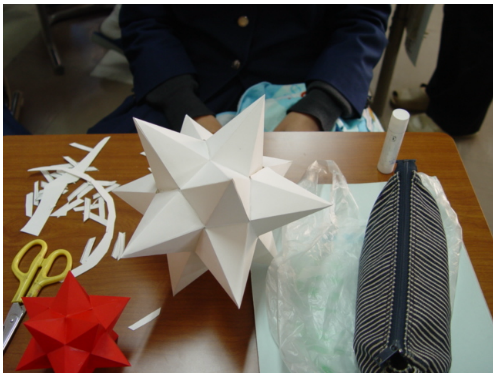
●２時間目

前時に作っていたとげの展開図から，とげを１２個作成する。そして，見本の模型を見ながら星形の立体を組み立てる。

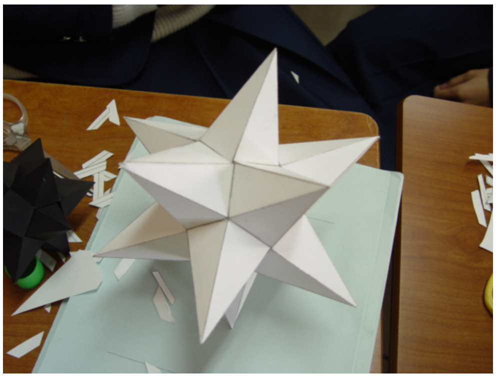
（写真４）

写真４は子どもが模型を組み立てている様子である。

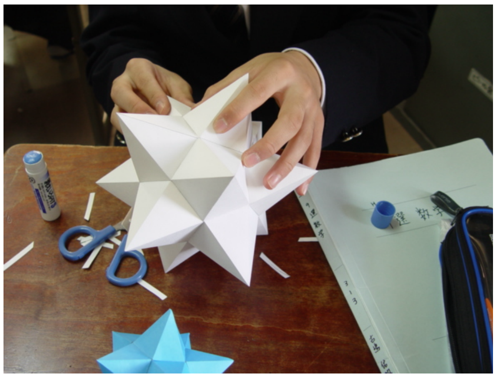
子どもが作った立体をいくつか紹介する。（写真５－７）



（写真５）



（写真６）



（写真７）

最後に，正十二面体の模型と，星形の立体が中に入った正二十面体の模型を提示し，今回作った星形の立体は，正十二面体の各面に五角すいをつけた立体だということと，星形の立体の各頂点を結ぶと，正二十面体になることを説明する。（詳しくは資料を参照。）

(2) 授業実践をするにあたって

初めて星形の立体を扱う生徒たちがイメージしやすいように，星形の立体の模型を生徒の人数分用意した。

模型作りは当初，折り紙で行う予定だったが，組み立てる際，より崩れにくいことと，印刷機を使って展開図を印刷することを考え，画用紙に変更した。また，印刷機を使用した理由は，同じ作図を１２回繰り返すことよりも，模型作りの時間を十分にとるためである。

とげの展開図を作図する際には，のりしろをかかなくてはいけないので，のりしろを含めた展開図を子どもたちに提示した。

そして，授業の最後に正十二面体と星形の立体と正二十面体の関連を説明するため，正十二面体の模型と，正二十面体の中に星形が隠れている模型を作り，生徒に提示した。

4. 実践結果と考察

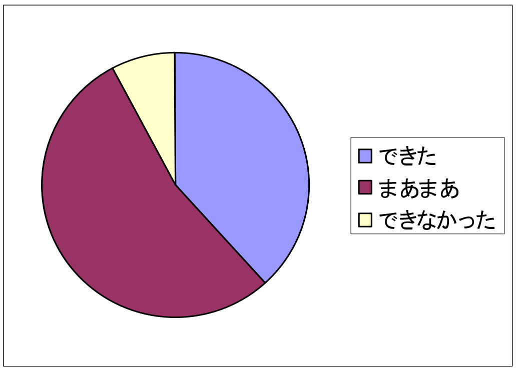
(1) 子どもの感想

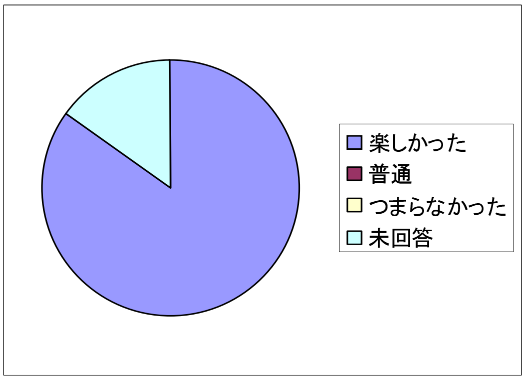
以下，子どもの感想を紹介する。

- 星形の立体が正十二面体と正二十面体の間にあるということは，びっくりした。

- 普通の授業ではできないことができて良かったし，楽しかった。
- 作っていくうちに，だんだん美しい形ができていくのが楽しかった。
- 今まで図形の勉強をしてきて，実際に作るということはあまりなかったので，今回の授業で理解が深まりました。
- とげをつなげるときは全部同じやり方でできたので，数学は共通点が１つはあるんだなーと思った。
- 数学にもおもしろいことがあると思ったし，こういう楽しい授業を毎回したい。

アンケート結果は以下の通りである。
●星形の模型作りは …





●今日の授業と中学３年間で学んだこととのつながりは何だと思いますか。

- 図形にもいろいろな形があるけど関係がある。
- 正十二面体や正二十面体を使っていることがわかった。
- 図形を立体的にして考え，２次元から３次元のものを作った。
- 今までで学習した錐のあつまりでできている。

(2) ねらいに対する考察

① 自分の手で実際に星形の立体を作ることで，立体をじっくり観察し，考察する力を身につけること

授業中，子どもたちは見本の模型を観察することで，星形の立体にとげが 12 個ついていること，とげの形が正五角すいであること，さらに頂点の数が 32 個であることや面の数が 60 であることなど，立体の特徴を捉えることができ，自分の模型を作ることができていた。

② 立体を扱うことの楽しさを知ること

子どもたちは，立体を自分で作るという経験がなかったので，星形の立体に対して興味をもって，主体的に模型作りの活動を行うことができていた。また，星形の立体が，正十二面体の各面にとげをつけたものであり，さらにとげの頂点をつなげると正二十面体になることを話すと，子どもたちは驚いた様子であった。このことは,「正十二面体と正二十面体の間にある立体だと聞いて，すごいと思った。」などと書かれている感想が多かったことからも推察できる。アンケート結果でも，楽しかったと回答する子どもが全体の 8 割（13 人中 11 人）であった。

③ 知らないことがらでも既習の内容に帰着して考えることで，同じように考えることができることを実感すること

とげの展開図をかく場面で，五角すいの展開図は学校で学習しないため子どもたちのとまどいが予想されたが，円すいの展開図と結びつけたり，合同な三角形がついていることから考えたりして，コンパスをうまく活用してかくことができる子どもが多かった。また，アンケート結果でも，子どもたちが「五角すいの集まりでできていることが分かった」「数学には必ずなにかつながりがあるんだなと思った」と書いている子どもが多かった。

以上のことよりねらいは達成できたと言える。

5. 今後の課題

今まで見たことのない立体を扱うことを考え，子どもたち一人一人に模型を用意したことで，子どもたちは手にとって立体を観察することができ，理解を深める手助けになったように感じた。このことより，教材の準備がとても大切であることを改めて実感した。

また，模型を作らせるときに，ただ作るのではなく，どのような特徴があるのかを作りながら考えるように助言をすると，もっと子どもたちの理解が深まったのではないかと思う。

２時間授業を行ったが，最後まで完成した子どもは３割ほど（13 人中４人）であった。このことより，もっと時間配分を考え，全員が完成できるように授業構成を練ることが大切だと感じた。

最後に授業実践にあたり，多大なご協力をいただいた岐阜市立青山中学校の皆様に心から感謝いたします。

引用文献

[1] 栃木県総合教育センターホームページ
http://www.tochigi-c.ed.jp/curriculum/index.htm

[2] 双曲平面一様充填形の世界
http://www2u.biglobe.ne.jp/~hsaka/mandara/intro-ja.html

資料
（1/2 時）

過程	学　習　活　動	指導・援助
導入	●星形の立体に興味をもつ。 〈問題〉 星形の立体について気づいたことや疑問を挙げてみよう。 ・どちらから見ても，星形に見える。 ・モヤッとボールみたい。 ・とげが 12 個ついている。 ・とげは正五角錐になっている。	○ クリスマスに関連させて星形に興味をもたせるようにする。 ○ 自分でも模型が作れそうという見通しをもたせるようにする。
展開	●とげを作る。 〈課題〉 星形の立体のとげを作ろう。 ○ 星形の立体のとげの試作品を作ってみよう。 ・どんな大きさで作ればいいかな。 ・思っていたより小さいとげになったな。 ○ 実際に作る大きさを決めよう。 → １つ展開図をかいたら，12 枚印刷機で刷る。 ⇓ とげ作り開始 〈全体交流〉 ・三角形を６つ作図して展開図をかいた。 ・三角形の作図のとき，円を利用して，簡単にかけるように工夫した。	○ どちらの展開図がよいかを，作図の観点から考えられるように助言する。 ○ 各面の二等辺三角形の底辺は同じ長さであることをしっかりおさえる。 ○ 展開図から，立体の大きさを想像しにくいと考えられるため，試作品を作って，大きさをつかませるようにする。

（2/2 時）

過程	学　習　活　動	指導・援助
まとめ	●前時の続きで模型作りをする。 ・3つの辺で1つの頂点が作られているから，ここ とここをつなげればいいのだな。 ・1つのパーツの周りに5つのパーツをつけたらいいのだな。 ●全体で交流する。 ◯ 工夫したところや苦労したところを発表しよう。 ・とげを作るときに，ずれないように丁寧に作図をした。 ・はじめに見本の模型をよく見て特徴をつかんでいたからうまく作ることができた。 ・複雑そうな立体だったけど，部分部分で見たら単純だった。 ●まとめる。 教科書で習う立体以外にもたくさん立体は存在する。 難しそうな立体でも部分部分に分けて見れば簡単なこともある。 星形の立体の頂点を結ぶと正二十面体になる。（模型の提示） → 正十二面体と正二十面体との関連性	◯ 見本の模型をよく見ながら作らせる。 ◯ ほかの生徒の発表を聞いて，自分とは違う考え方に気づけるようにする。