

2倍取りゲームの数理を扱った授業の提案

富倉亮¹, 石渡哲哉²

本報告書では平成16年10月24日に、中学校三年生から高校二年生までを対象に行った授業について報告する。本実践は、2倍取りゲームと呼ばれる碁石取りゲームの数理を扱った。2倍取りゲームには、初めに与えられる碁石の数を見て先手にするべきか、後手にするべきかを判定し、それに伴って碁石を上手く取り除く方法、必勝法がある。この必勝法を使うと確実に勝てることを体験した後に、必勝法を数学的に表現し、その数理の証明を講義形式で行った。

1. はじめに

数学のよさのひとつとして「自然界にあるいろいろな事象を簡潔に表現することができ、さらにその事象を明確に考察することができる」ということがある。この数学のよさを感じ得るために、ひとつの視点として「規則性」を挙げた。規則性に着目すると、事象を帰納的に考察することができる。さらにその事象に規則性があることが分かれば、その規則性を利用することにより、先の見通しを立てることもできる。そこで、規則性に着目できる教材として数列を取り上げ、さらに数列の中でも自然界に多く登場し、数理的研究も多くなされているフィボナッチ数列を扱った。

本実践においては、日常生活に関連した数学、または普段学校では扱わない数学を行うことを大きなテーマとした。そこで、上で述べた理由から、フィボナッチ数列に関連した2倍取りゲームの数理の証明を試みた。この2倍取りゲームには必勝法がある。ここでいう必勝法とは、初めに与えられる碁石の数を見て先手にするべきか、後手にするべきかを判定し、それに伴って碁石を上手く取り除く方法のことである。この必勝法を数学的に表現したものを提示し、その方法が必勝法になって

いることを理解した後、数学的な証明を講義形式で行った。しかし、生徒にとっては実際に活動したことを数学的に表現して証明することや、講義形式で授業を受けたことも経験がない。よって、生徒が深く理解するためには、それ相応の手立てが必要になる。具体的な手立てについては次節で述べる。本報告書で紹介する授業の数学的内容は参考文献 [2] に述べてあるため、ここでは省略する。

この授業を通して、生徒たちに数学的活動の楽しさや有用性を感じるだけでなく、数学という学問が学校の教科として学習するだけでなく、日常生活のいろいろな事象を解明するときにも使われる学問であるということや、また長い証明を理解することを通して、数学という学問は簡単に理解しきれないものばかりではないということを実感させたい。さらに、この実践を通して、長い証明に対しても最後まであきらめずに取り組み、根気よく問題解決できる姿を目指し、実践を行う。

2. 実践の工夫・留意点

本実践は、学校では体験することのない長い証明として、2倍取りゲーム必勝法の証明を行うことにより、最後まであきらめずに問題解決に取り組む姿を目指す。以下にその目指

¹岐阜大学大学院教育学研究科

²岐阜大学教育学部

す姿を実現するために、本実践における工夫した点、留意した点について述べる。

・ 長い時間をかけて行う。

生徒たちにとって、ここで扱うような長い証明は初めての経験である。よって、ゆっくり行うために長い時間をかける。その中で、生徒にじっくり考えさせることを目的とする。

・ 証明を分割し、その分割したものを具体的な局面に対応させる。

長い証明であるため、証明を小分けする。そしてその小分けした証明を2倍取りゲーム内の局面に対応させることによって、生徒の理解を得ることを目的としている。

・ 小グループで追求する。

1グループ5人の小グループ構成にした意図は3つある。1つ目は、生徒たちがグループ内の二人の対戦を観察することで必勝法を見つけやすくするためである。2つ目は分から

なくなった生徒が孤立しないように、生徒同士で話し合う場を作り、疑問を共有できる場面を作るためである。3つ目はTAに質問したときにグループ内で聞きあうことができ、考えを共有することができるためようにするためである。

・ 演習問題を用意し、具体的な数値を代入することで理解を得る。

生徒にとって、戸惑う部分が多いと予想されるこの証明に対する指導援助として、証明内の式変形を演習問題として与える。また、この証明は文字を多数用いている。そのため混乱を生じる恐れがあるので具体的な数値を与え、体験的・視覚的にも理解を得ることを目的としている。

3. 本時のねらい

必勝法をある一定の規則により帰納的に推論し、その必勝法の数学的な証明を知ることができる。

4. 展開

学習のねらい	学習内容	指導上の留意点
<p>上手にとれば必ず勝つことができる方法があることに気付く。</p> <p>フィボナッチ数が関連していることに気付く。 体験・視覚的に理解する。</p> <p>具体的な数値の代入で理解する。</p>	<p>導入 2倍取りゲーム</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>【ルール1】パスはなし 【ルール2】自分の番の時碁石を全部取ったら勝ち 【ルール3】最初に全部の碁石を取ることはなし 【ルール4】自分の番のときに取れる碁石の数は、相手の取った碁石の数の2倍までとする。 【ルール5】最初が1個の時は先手が負け。</p> </div> <p>「すべての碁石を使わなくてもいいから、遊んでみよう」</p> <ul style="list-style-type: none"> ・1個取って3個にしたら勝てる。 ・8個にしたら何となく勝てそう。 ・必勝法が存在しそうだな。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> <p>初めに与えられる碁石の数 n を見て先手にするべきか、後手にするべきかを判定し、その時に、碁石を取り除く最適な方法を見つけよう。</p> </div> <p>ヒント フィボナッチ数の紹介 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} (F_1 = F_2 = 1)$ フィボナッチ分解の紹介 「ある数字をフィボナッチ分解してみよう。」 「フィボナッチ分解の存在・一意性の証明はしませんが納得できますか。」</p> <p>2倍取りゲームの必勝法 < 講義形式 > 定義の説明・必勝法(定理)の説明・定理の証明・具体例 証明の中で、演習問題を与える。</p> <p>まとめ 遊びの中に数学で証明できることはたくさんある。その証明をするために、難しい数学を学ぶ。今学校でやっていることは、数学の中でも基礎的な一部分である。</p>	<p>あらかじめ碁石を分けて配る。グループ学習形態にする。</p> <p>すべての碁石を使う必要はない。</p> <p>必勝法の証明に必要な知識なので、丁寧に説明する。 フィボナッチ分解も簡潔に丁寧に説明する。 $F_1 = F_2 = 1$ より、$F_2 = 1$ のみを採用することに留意をおく。 提示した定義や定理は掲示。</p>

5. 成果と課題

5.1. 生徒の姿より

初めに碁石を配り、ルールを説明したところ、生徒たちはそのルールを理解し、2倍取りゲームをグループ内で楽しめた。その中で、必勝法があることに気付き、初めが3個のときと5個のときの必勝法をすぐに見つけることができた。また、時間の経過とともに8個のときの必勝法も見つけることができた。しかし、初めの碁石の数が多いときの必勝法を見つけることは困難であった。そこで授業者がフィボナッチ数列とフィボナッチ分解を紹介して、必勝法に関連していることを伝えるとグループ内での試行錯誤より、関連に気付くことができた。そして、それが本当に必勝法になっているのかという疑問から証明をするという課題意識が持てた。生徒たちは関心を持って取り組みようとしていたが、必要な定義・定理を提示したら、内容が難しいということに気付き、悲鳴をあげる生徒もいた。そこで、生徒が何を何のために、何に向かって証明を進めるのかということを見失わないように、留意した点は上述した。そのことにより、生徒は体験的・視覚的に追求を進めることができた。しかし、具体例を提示する場面が少ないため、困惑していた生徒もいた。その生徒にはTAと共に授業を進めるという援助をした。逆に早く理解できた生徒は別に用意した数学の問題を解いていた。

実際の予定時間(3時間)を越えたが、途中で投げ出す生徒はおらず、苦しみながらも生徒の最後まで内容を理解しようとする姿を見ることができた。さらに授業終了後、もう一度ノートを読み直す生徒もいた。

5.2. アンケートより

授業後にアンケートを行った。その中で本報告書に関連する事項を下に挙げる。

(i) 日常生活には、数学が密接に関連していると感じましたか。

(ii) 数学に対する見方が少しでも変わりましたか。

「はい」と答えた人に質問します。変わる要因になった話は何ですか。(複数回答可)

(iii) フィボナッチ数列について興味を持ってましたか。

(vi) 数学的な証明についてお答えください。(複数回答可)

以下にそれぞれの結果に対する考察を述べる。

(i) 日常生活には、数学が密接に関連していると感じましたか。

本実践では2倍取りゲームという日常生活の事象を必勝法という観点から数学の問題として扱い、解明することを行った。その中で、日常生活と数学の関連性を感じ取ることができたかという質問である。結果は以下のようである。

	人数
はい	13
どちらでもない	1
いいえ	0

この結果から、関連を感じる事ができた生徒が多かった。しかし、どちらでもないと感じた生徒もいたことから、現実の世界と数学の世界の行き来を丁寧に解説する必要があると感じた。本実践に限らず、現実の事象を数学の問題として扱う際に、その変換をイメージすることは大切なことである。その変換をスムーズに行うために、具体的な例をより多く用いることが1つの解決策であると考えられる。

(ii) 数学に対する見方が少しでも変わりましたか。

事前に「数学は好きですか」というアンケー

トをしている。そこでは全員好きであると答えた。理由に「難しい問題を解くことができたときの達成感がよい」「答えがはっきりしているから」「1つの答えに対して様々な道があるから」等があった。本実践では、普段学校ではできない数学や日常生活に関連した数学をすることを大きなテーマとしていた。学校で学習している数学が何の役に立つか、本実践においては数列が必勝法を解明するために必要であることを感じたかどうかを調べるための質問である。結果は以下のようである。

	人数
はい	14
どちらでもない	0
いいえ	0

この結果から全員生徒は数学に対する見方が変わったと答えている。このことより、生徒にとって数学という学問が教科の数学とだけ考えているのではないかと考えられる。この高校数学セミナーにおいて数学に対する見方が変わったと生徒自身で感じ取れたことは良い結果であると受け止める。

(iii) フィボナッチ数列について興味を持ちましたか。

フィボナッチ数列という特別な規則性を持つ数列を使って、2倍取りゲームの必勝法の証明を行った。本実践を終えて、フィボナッチ数列に興味をもつことができたかを質問した。結果は以下のようである。

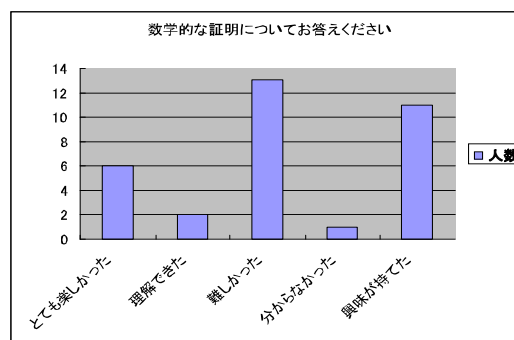
	人数
大変もてた	9
少しもてた	5
どちらでもない	0
あまり持てなかった	0
持てなかった	0

この結果から全員がフィボナッチ数列に少しでも興味を持てたことが分かる。本実践のよ

うに長い証明を扱ったにもかかわらず、フィボナッチ数列に興味を持てたという結果から、生徒は最後まであきらめずに問題解決することができたと考える。さらに、この結果と前の結果から、フィボナッチ数列は数学に対する見方を変えることができ、また興味関心を引き出すことができる教材であるという結果を得た。

(vi) 数学的な証明についてお答えください。(複数回答可)

数学という学問は簡単に極めることができる学問ではない。生徒たちはそれをわかっていたかもしれないが、そのことを直に感じるために、本実践ではルールの少ないゲームの必勝法を数学の問題として証明した。この証明は簡単なものではない。この定理を証明するためにフィボナッチ分解の存在と一意性を認めなくてはならない。さらに、存在と一意性を認めたとしても、これは簡単に理解できる証明ではない。生徒にとって初めての体験となったこの数学の証明をどのように感じたかということ質問した。結果は以下のようである。



この結果から、難しかったと感じる生徒が一番多く、分からなかったという生徒が1人いた。このことより、このように感じたという結果から、初めての長い時間、長い証明に対してあきらめずに最後まで問題解決に取り組めたと判断する。このことより本実践の目指す姿として設定したことは達成できたと判断する。

また、次に多かったのが、興味が持てた、とても楽しかったと感じた生徒である。このことより、長い証明があることを知ればよいというねらいを持っていたが、それ以上に生徒たちは興味関心を持って取り組めたと考える。しかし、理解できたという生徒や分からなかったという生徒がいたことに対して、さらに具体例を多く取り上げ、この式はゲームの中の何を表しているのか等の説明、証明の流れや使う考え方などの証明の全体構造の提示、といった理解援助の研究がさらに必要であるという課題をもった。

5.3. 実践後の反省より

本実践を行うにあたって留意・工夫した点を上述した。そのそれぞれにおける成果と課題を述べる。

・長い時間をかけて行う。

生徒たちにとってこのような講義形式で授業を受けることも、簡単に理解できない証明をすることも、初めての経験であることから、長い時間をかけ、じっくり証明を進めた。その結果、最後まであきらめずに問題解決をする姿を見ることができたと考える。しかし、さらに内容を理解するためにも、長時間の実践の中に進める証明の見直す時間として、休憩時間等の配慮が必要であったと考える。

・証明を分割し、分割したものを具体的な局面に対応させる。

授業中の生徒の様子から、このような工夫が理解援助になっていたと感じている。どのような証明を行うときでも、到達点や方向を見失わないためにも具体的な局面と対応させることは大切なことであると感じた。しかし、アンケートの結果から証明全体を見渡したとき、学力の差があるとは思いますが、理解できたという数が少なかったことから、細かい部分の到達点や方向を示す以外に、初めに証明の全体構造を示すことを課題として感じた。

・小グループで追求する。

2倍取りゲーム行う活動と、必勝法を見つけようとする活動と、演習問題を解く場面では小グループの中で追求を進めていたが、証明の中で分からないところを教えあうという姿はなかった。このことからそのような時間を十分に取れなかったという課題が挙げられる。しかし、TAの解説を小グループ内で聞く姿は見ることはできた。このことより小グループ内での活動を多く用意することで、理解できたと感じる生徒が増えたのではないかと考える。

・演習問題を用意し、具体的な数値を代入することで理解を得る。

何か新しいことを知るためには、まず具体的な理解から、一般的な理解を求めることが理解を得やすいと考える。そのためにこのような演習問題を用意すること、証明内での文字に具体的な数値を代入することは生徒たちが体験的・視覚的に理解することができ、ひとつの理解援助になっていたと考える。しかし実践において、まず文字を用いて説明してから、具体的な数値を代入したため困惑が生じたのではないかと反省する。

学校の授業の中でも、すべて個別指導やグループ別指導、学習内容の習熟の程度に応じた指導、生徒の興味・関心等に応じた課題学習、補充的な学習や発展的な学習などの学習活動を取り入れた指導だけではなく、教師の協力的な指導も必要であると考え。つまり、数学では定義を導入する場面のように生徒と生み出していく指導だけではなく、教師が教えるという場面も必要である。そのときにどのような方法で伝えていくのかという部分も今後研究しつづけていきたい。

参考・引用文献

- [1] 岩堀長慶, 1993, 2次行列の世界, 岩波書店.
- [2] 富倉亮・石渡哲哉, 2003, フィボナッチ数を用いた教材開発とその実践, 岐阜数学教育研究, Vol.2, 147-163.