テイラーの定理の証明について

亀山敦

平成 18 年 7 月 14 日

教科書類を見てみると、テイラーの定理の証明は三種類ほどみつかる。以下にその三つを述べるが、その中でも証明１は多くの教科書に採用されており、証明３はめったに見ない。証明１は、そのまま理解するには多少無理なところがあるように思うので、他の証明と比較することによって、学習者の解析学の理解をより自然なものにするためこの文章を書いた。

テイラーの定理 閉区間 $[a,b]$ 上 n 回微分可能関数 $f(x)$ について

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) \\ + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + R_n \end{aligned}$$

とかくとき、

$$R_n = \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

となる c が $a<c<b$ に存在する.

証明１

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) \\ + \cdots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + A(b-x)^n \end{aligned} \tag{1}$$

とおく。ただし, A は定数で $g(a) = g(b)$ となるように選ぶ。ロールの定理から $g'(c) = 0$ となる $a<c<b$ がある。

$$g'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) - nA(b-x)^{n-1} \tag{2}$$

なので

$$\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!} - nA = 0 \tag{3}$$

一方, $g(a) = g(b) = f(b)$ なので

$$f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + A(b-a)^n = f(b) \quad (4)$$

(3) と (4) から定理を得る。

証明２

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

と仮定してよい。このとき

$$f(b) = \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c)$$

となる $a < c < b$ の存在がコーシーの平均値の定理を何回も使って示される。

$$\frac{f(b)}{(b-a)^n} = \frac{f'(c_1)}{n(c_1-a)^{n-1}} = \frac{f''(c_2)}{n(n-1)(c_2-a)^{n-2}} = \cdots = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

（ $a < c < \cdots < c_2 < c_1 < b$）

証明３ ふたたび

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

を仮定しよう。すると、部分積分を何回も使って

$$\begin{aligned} f(b) &= \int_a^b f'(x)dx = -\int_a^b f'(x)(b-x)'dx \\ &= \int_a^b f''(x)(b-x)dx = -\int_a^b f''(x)\left[\frac{(b-x)^2}{2}\right]'dx \\ &= \int_a^b f'''(x)\frac{(b-x)^2}{2}dx = \cdots = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}dx \end{aligned}$$

ここで、積分の平均値の定理から

$$f(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}\int_a^b (b-x)^{n-1}dx = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

となる $a < c < b$ が存在する。

- 証明１がもっともエレガントだろう。ロールの定理しか使っていない。

  また、コーシーの剰余を得るには (1) において $A(b-x)^n$ のかわりに $A(b-x)$ とする。ロッシュの剰余を得るには $A(b-x)^p$ とする（$1 \leq p \leq n$）だけでよく、拡張性もよい。

  ただし、(1) 式のような $g(x)$ を思いつくのはなかなかできないし、証明中も何をやっているのかが見にくい。実は、$g(x)$ は (2) をみたすように定めたのであり、この証明は積分の言葉を使わずに証明３を書き換えたものといえる。

- 証明２はコーシーの平均値の定理を使っているので証明１より少し高度である。しかし、証明の手順は平易である。証明中、何をやっているのかがよくわかる。

  しかし、拡張性はよくない。他の剰余形が必要ないなら、証明２が最もすぐれているようにも思えるのだが。

  コーシーの剰余を得るには、

  $$\frac{f(b)}{b-a} = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt}{b-a}$$

  にコーシーの平均値の定理を一回適用する。ロッシュの剰余を得るのは面倒くさく、$g^{(p)}(t) = (b-t)^{n-p} f^{(n)}(t), g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(p-1)}(a) = 0$ なる g を使い

  $$\frac{f(b)}{(b-a)^p} = \frac{1}{(n-1)(n-2)\cdots p}\frac{g(b)}{(b-a)^p}$$

  にコーシーの平均値の定理を p 回適用する（$1 \le p \le n$）。$f(b) = g(b)/(n-1)(n-2)\cdots p$ なることの証明は下の付録に。

- 証明３はもっとも基本的な証明である。積分を使っているので、この証明を選ぶとすると解析のコースではテイラーの定理をずいぶん後回しにしないといけない。しかし、積分の後でもいいから、この証明を一度は見ておく価値はあると思う。証明１しか知らなくて、もやもやしていた心がすっとするのではなかろうか。

  コーシーの剰余やロッシュの剰余を得るには積分の平均値の定理より

  $$f(b) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}dx = \frac{f^{(n)}(c)(b-c)^{n-1}(b-a)}{(n-1)!}$$

  などとすればよい。

  また、f が C^n 級という仮定であれば、積分の平均値の定理は中間値の定理の帰結だが、f が単に n 回微分可能という仮定の下では中間値の定理の変形を示す必要がある。

  「g が $[a,b]$ で微分可能なら g' について中間値の定理がなりたつ。」

  これは次のロールの定理の変形から導かれる。

  「g が $[a,b]$ で微分可能で $g'(a)g'(b) < 0$ なら、ある $a < c < b$ で $g'(c) = 0$」

  この証明はロールの定理とほとんど同じである。

付録 $f(b) = g(b)/(n-1)(n-2)\cdots p$ なることの証明：

$$g(t)=\int_a^t\int_a^{t_p}\cdots\int_a^{t_3}\int_a^{t_2}(b-t_1)^{n-p}f^{(n)}(t_1)dt_1dt_2\cdots dt_{p-1}dt_p$$

である。

$$\begin{aligned}g^{(p-1)}(t)&=\int_a^t(b-t_1)^{n-p}f^{(n)}(t_1)dt_1\\&=(b-t)^{n-p}f^{(n-1)}(t)+(n-p)(b-t)^{n-p-1}f^{(n-2)}(t)\\&+(n-p)(n-p-1)(b-t)^{n-p-2}f^{(n-3)}(t)+\cdots+(n-p)!f^{(p-1)}(t)\end{aligned}$$

となることに注意すると、

$$\begin{aligned}g^{(p-s)}(t)&=C_{s,n-p}(b-t)^{n-p}f^{(n-s)}(t)+C_{s,n-p-1}(b-t)^{n-p-1}f^{(n-s-1)}(t)\\&+\cdots+C_{s,1}(b-t)f^{(p-s+1)}(t)+C_{s,0}f^{(p-s)}(t)\end{aligned}$$

という形をしていることがわかる。ただし $C_{s,l}$ は定数で、

$$C_{s,l}=c_{s,l}\frac{(n-p)!}{l!}$$

とおくと、

$$c_{s+1,n-p-m}=c_{s,n-p}+c_{s,n-p-1}+\cdots+c_{s,n-p-m}\tag{5}$$

をみたしている。ここで、二項係数を使って

$$c_{s,n-p-m}=\binom{m+s-1}{s-1}=\binom{m+s-1}{m}$$

（$s=1,2,\ldots,p,\ m=0,1,\ldots,n-p$）と書けることを数学的帰納法で示せる。

実際、$s=1$ のときと $m=0$ のとき成り立つことはすでにわかっている。そこで、$s=S-1$ 以下のときと、$s=S$ で $m=0,1,\ldots,M-1$ まで成立したとして

$$c_{S,n-p-M}=\binom{M+S-1}{M}$$

を示せばよい。(5) と帰納法の仮定より

$$\begin{aligned}c_{S,n-p-M}&=c_{S-1,n-p}+c_{S-1,n-p-1}+\cdots+c_{S-1,n-p-M+1}+c_{S-1,n-p-M}\\&=c_{S,n-p-M+1}+\binom{M+S-2}{M}\\&=\binom{M+S-2}{M-1}+\binom{M+S-2}{M}=\binom{M+S-1}{M}\end{aligned}$$

となり示された。

よって

$$\frac{g(b)}{f(b)}=C_{p,0}=\binom{n-1}{n-p}\frac{(n-p)!}{0!}=(n-1)(n-2)\cdots p$$

となる。

（2006/7/14）