収束する級数の積が収束しない例

平成 17 年 9 月 15 日

級数 $a_0 + a_1 + \cdots$ と $b_0 + b_1 + \cdots$ が絶対収束すればその積も絶対収束することは教科書によく書いてある．絶対収束を仮定しないときの反例について記載してある教科書を見たことがないので，ここに簡単な例を挙げる．

例

$$a_k = \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{(2k)!}{(k!)^2}$$

とおくと，$a_0 + a_1 + \cdots$ は収束するが $c_k = \sum_{i=0}^k a_i a_{k-i}$ とおいたとき $c_0 + c_1 + \cdots$ は収束しない．

証明 $(1+x)^{-1/2}$ をベキ級数展開したものが

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} x^k$$

なので，$(1+x)^{-1}$ のベキ級数展開を考えると

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} = (-1)^k$$

である．あきらかに $1 - 1 + 1 - \cdots$ は収束しない．スターリングの公式より $|a_k| \sim 1/\sqrt{\pi k} \to 0$ $(k \to \infty)$ なので交代級数 $a_0 + a_1 + \cdots$ は収束する．

注 級数 $a_0 + a_1 + \cdots$ と $b_0 + b_1 + \cdots$ にたいして，その積としては $c_0 + c_1 + \cdots, c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$ という級数を考えているのである．

$a_0 + a_1 + \cdots$ と $b_0 + b_1 + \cdots$ が収束すればあきらかに，$\lim_{k,l\to\infty}(a_0 + a_1 + \cdots + a_k)(b_0 + b_1 + \cdots + b_l)$ は存在するので，積としてどの級数を考えているかを明確にしないといけない．

もし $a_0 + a_1 + \cdots$ と $b_0 + b_1 + \cdots$ の一方が 0 でない項を少なくともひとつもち，もう一方が条件収束であれば，$c_0 + c_1 + \cdots$ は収束したとしても条件収束である (ベキ級数の収束半径を考えればわかる)．

コメント 一般に，$k \geq N$ で $C|a_k| > k^{-1/2}$ であれば

$$\liminf_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} |a_i a_{k-i}| > 0.$$

なぜなら, $k \to \infty$ のとき

$$C\sum_{i=0}^{k}|a_i a_{k-i}| > \sum_{i=N}^{k-N}\frac{1}{\sqrt{i(k-i)}} = \sum_{i=N}^{k-N}\frac{1}{k}\frac{1}{\sqrt{\frac{i}{k}(1-\frac{i}{k})}}$$
$$\to \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \pi$$

だから. （2005/9/14）

さらに一般に, $k \geq N$ で

$$C_1|a_k| > k^{-\alpha},\ C_2|b_k| > k^{-\beta}$$

$(\alpha+\beta=1)$ であれば

$$\liminf_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k}|a_i b_{k-i}| > 0$$

となることが同様にいえる.

逆に, $k \geq N$ で

$$C_1|a_k| < k^{-\alpha},\ C_2|b_k| < k^{-\beta}$$

$(C_1, C_2 > 0, \alpha, \beta > 0, \alpha+\beta > 1)$ であれば

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k}|a_i b_{k-i}| = 0$$

である. なぜなら, $\alpha, \beta < 1$ なら上と類似の議論で $k \to \infty$ のとき

$$C_1C_2\sum_{i=0}^{k}|a_i b_{k-i}| \sim C_1C_2\sum_{i=N}^{k-N}|a_i b_{k-i}|$$
$$< \sum_{i=N}^{k-N} i^{-\alpha}(k-i)^{-\beta} = \sum_{i=N}^{k-N} k^{1-\alpha-\beta}k^{-1}\left(\frac{i}{k}\right)^{-\alpha}\left(1-\frac{i}{k}\right)^{-\beta}$$
$$\to \lim_{k\to\infty} k^{1-\alpha-\beta}\int_0^1 x^{-\alpha}(1-x)^{-\beta}dx = 0$$

である. α, β のどちらかが 1 以上であっても, 1 より小さいものにとりかえて, 条件をみたすようにすればよい. (訂正、加筆 2005/9/15)