連立一次方程式の「別」解法

亀山敦

2020/11/9

A を $m \times n$ 行列とし、連立一次方程式 $Ax = 0$ を解く。普通のガウスの消去法と似ているが、ちょっと違うやりかたを見つけたのでメモしておく。この方法では、行列を変形していくと、解 $x = Bt, t \in \mathbb{R}^l$ を表す行列 B が直接現われてくるのだ。逆問題も同様に解ける。

ただし、行列の成分を倍以上にして、基本変形をするので、計算は大変になる。よい応用があるかどうか、今のところよくわからない。

このやりかたは、すでにどこかの文献にあるかもしれないが、全くわからない。

定理

1. A の下に単位行列を置き、$(m+n) \times n$ 行列 $A' = \begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}$ とする。A' に列基本変形を何回か施し、行列 $\begin{pmatrix} P & O \\ Q & B \end{pmatrix}$ を得たとする。ただし P は $m \times r$ 行列、B は $n \times (n-r)$ 行列、$r = \operatorname{rank} A$。このとき、方程式 $Ax = 0$ の一般解は $x = Bt, t \in \mathbb{R}^{n-r}$ と書かれる。

2. 逆に、$n \times l$ 行列 B が与えられているとする。B の右に単位行列を置き、$n \times (n+l)$ 行列 $B' = \begin{pmatrix} B & E \end{pmatrix}$ とする。B' に行基本変形を何回か施し、行列 $\begin{pmatrix} P & Q \\ O & A \end{pmatrix}$ を得たとする。ただし P は $r \times l$ 行列、A は $(n-r) \times n$ 行列、$r = \operatorname{rank} B$。このとき、方程式 $Ax = 0$ は $x = Bt, t \in \mathbb{R}^l$ を一般解にもつ。

証明: 1 と 2 は同じことを言っていることに注意しよう。すなわち、1 は、A の列ベクトルで生成される部分空間の直交補空間を求めており、2

は B の行ベクトルで生成される部分空間の直交補空間を求めている。2 だけ証明すればよい。

$u = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+l}$ とする。基本変形より

$$B'u = 0 \iff \begin{pmatrix} P & Q \\ O & A \end{pmatrix} u = 0$$

すなわち

$$-Bt = x \iff Pt = -Qx, Ax = 0$$

これから、$x = Bt$ の形の x はすべて $Ax = 0$ をみたすことがわかり、逆に x が $Ax = 0$ をみたすとき、 $Pt = Qx$ をみたす t をもってくれば $x = Bt$ の形に書けていることがわかる。ここで、$Pt = Qx$ をみたす t が存在することは、P の階数が r であることからわかる。(証明終)

注意: 1 において、等式 $AE = A$ に右から正則行列 $\begin{pmatrix} Q & B \end{pmatrix}$ をかけることを考えると $A\begin{pmatrix} Q & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & O \end{pmatrix}$ である。$\begin{pmatrix} Q & B \end{pmatrix}$ は、写像 $x \mapsto Ax$ のカーネルとその補空間への分解を与えており、P の列ベクトルはその写像のイメージの基底をなす。2 はその双対である。

非同次方程式 $Ax = b$ の解は以下のようになる。

系 $m \times n$ 行列 A とベクトル $b \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとする。拡大係数行列 $\tilde{A} = (A\ b)$ とし、$(m+n+1) \times (n+1)$ 行列 $A' = \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ E \end{pmatrix}$ とする。

A' に列基本変形を何回か施し、行列 $\begin{pmatrix} P & O \\ Q & \tilde{B} \end{pmatrix}$ を得たとする。ただし P は $m \times r$ 行列、$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & v \\ O & z \end{pmatrix}$ は $(n+1) \times (n-r+1)$ 行列、B は $n \times (n-r)$ 行列、$v \in \mathbb{R}^n$、$z \in \{0, 1\}$, $r = \operatorname{rank} \tilde{A}$。$z = 1$ のとき、$r = \operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A$ で、方程式 $Ax + b = 0$ の一般解は $x = v + Bt, t \in \mathbb{R}^{n-r}$ と書かれる。$z = 0$ のとき、$r = \operatorname{rank} \tilde{A} \neq \operatorname{rank} A = r - 1$ で方程式 $Ax + b = 0$ は解をもたない。

証明 定理より $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} t + s \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}^{n-r}, s \in \mathbb{R}$ は $\tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = 0$

の一般解。

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = 0 \iff Ax + ub = 0$$

と

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ O \end{pmatrix} t + s\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \iff x = Bt + sv, u = sz$$

に注意すれば、結論を得る。(証明終)

注意: 一般解が $x = v + Bt, t \in \mathbb{R}^{n-r}$ となる非同次方程式 $Ax = b$ を求めるには、$x = Bt$ が一般解となる同次方程式 $Ax = 0$ を求め、$b = Av$ とおけばよい。