行列の階数についてのメモ

平成 20 年 11 月 12 日

1　はじめに

大学初年度で教えられる線形代数の最初のほうに出てくる命題で、もっとも非自明で面白いものは、行列の縦ベクトルの線形独立な個数と、横ベクトルの線形独立な個数が一致するというものではないだろうか。

教科書によっては、触れてすらいないこともある。一見簡単そうな命題だが、容易には証明が思い浮かばないと思う。これは、定義にもどればわかるというたぐいの命題ではなく、補助線を引かないと証明できない命題であろう。補助線は行列の階数である。この命題を証明することイコール行列の階数を理解することともいえそうである。

階数にいくつかの同値な定義があることは、数学の奥深さを表す事例としてしばしば強調される。私が大学一回生のときの試験でも、「行列の階数について何か書け」というような問題が出たことを憶えている。試験後の講義で担当の F 先生は、みんなこの問題の意味がわかっていなかったようだともらしていた。まあ、これは大学にはいったばかりの学生には難しいと思う。

このメモで書きたいことは、単に同値な定義がたくさんあるというだけでなく、そのいろいろな定義が異なった証明をもたらすということである。気をつけていないと通り過ぎてしまうような小さな命題だが、よく見てみると興味深い構造が隠れているのである。

2　命題と証明の分類

命題　行列の縦ベクトルの線形独立な個数と、横ベクトルの線形独立な個数は一致する。

言っていることは明らかだろうが、補足しておく。「縦ベクトルの線形独立な個数」という省略した言い方で表しているのは、n 個の線形独立な縦ベクトルはとれるが、$n+1$ 個とると必ず線形従属になってしまうときの n のことである。

このベクトルの個数のことを行列の階数という。上の二つ以外にも、階数を定義する方法がいくつかある。それらを、定理の形で述べると、

定理　$n \times m$ 行列 A に対し、次のように定義される整数はすべて一致する。(A は実数行列と考えているが、複素数でも同じである。)

1. A の縦ベクトルの線形独立な個数
2. A の横ベクトルの線形独立な個数
3. 連立方程式 $Ax = 0$ の解の自由度を d としたとき、 $m - d$
4. A の r 次小行列式で、0 とならないものがあるような最大の r
5. A で定まる線形写像 $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ の像の次元
6. A で定まる線形写像 $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ の核の余次元
7. ${}^tAA$ の縦ベクトルの線形独立な個数
8. A を行基本変形で階段行列にしたときの段の個数
9. 正則行列 P, Q を用いて、$PAQ = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ としたときの k (E_k は k 次単位行列)
10. 変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ を使って多項式

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

を考える。$P = \sum_{i=1}^{l} s_i t_i$ と表したときの最小の l。ただし、s_i は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の一次式、t_i は $y_1, y_2, \ldots, y_m$ の一次式。

これから、命題を５種類の方法で証明していくが、その過程で定理も証明されることになる。その内訳は、次のようである。

- 線形写像による証明。1,2,3,5,6,7 が等しいことが示される。双対による証明といったほうがよいかもしれない。双対の定義を用意するのが面倒だが、このあたりは数学の常識であろう。余分な構造を使わない低レベルな証明であり、いちばん素直なもののように思われる。商空間を考えると、証明の見通しがよくなる。

  また、内積を使った証明はその特別な場合といえる。この場合は、双対や商空間という概念を出さずとも、すっきりとした証明が得られる。

- 小行列式による証明。1,2,4 が等しいことが示される。階数の定義として 4 を採用し、証明している教科書もいくらかある。この定義の利点は、最初から縦と横を区別していないことだろう。

- 標準形による証明。1,2,8,9 が等しいことが示される。ガウスの消去法が理解できるなら、階段行列を使った証明法も理解できるだろう。そういう意味では、初学者にやさしい証明法かもしれない。しかし、アルゴリズムによる証明というのは、ときに構造を覆い隠してしまうことがある。

  構造の理解のためには、次のように考えるとよい。9 のような形で、標準形を定義するということは、$n \times m$ 行列全体にある同値関係を導入していることになる。すなわち、正則行列 P, Q があって $PAQ = B$ となるとき $A \sim B$ と定める。このとき、階数がこの同値関係の完全不変量になるのである。

- 双線形形式による証明。1,2,10 が等しいことが示される。「双線形形式による」と言っていいかどうか。手持ちの教科書類には、この方法を採用しているものはなかった。いちばんエレガントな方法ではないだろうか。

いくつかの証明では、次元の概念を使う。次元が矛盾なく定義でき、部分空間の次元はもとの空間の次元を超えないという事実は、ほぼ次の命題に基づいているといってよい。

「$\mathbb{R}^n$ の線形独立な n 個のベクトルがあれば、その線形結合ですべてのベクトルが表せる」

これを n についての帰納法で示そう。$n = 1$ のときは明らか。$n - 1$ のときに示せたと仮定する。$\mathbb{R}^n$ の線形独立な n 個のベクトルがあったとする。その線形結合で、第 1 基本ベクトル ${}^t(1\ 0\ 0\ \cdots\ 0)$ が表せなかったとすると、その n 個のベクトルの第 1 成分を除いてできる、n 個の $\mathbb{R}^{n-1}$ のベクトルは線形独立である（補題 1)。これは仮定に矛盾しているので、第 1 基本ベクトルは線形結合で表せる。同様に、すべての基本ベクトルは線形結合で表せる。これで、帰納法により証明できた。

補題 1　$\mathbb{R}^n$ の線形独立なベクトル $a_1, a_2, \ldots, a_l$ で張られる空間に第 1 単位基本ベクトル ${}^t(1\ 0\ 0\ \ldots\ 0)$ が属さないとする。このとき第 1 成分を取り去った $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_l \in \mathbb{R}^{n-1}$ も線形独立。

補題 1 の証明　$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_l$ が線形従属なら、すべては 0 でない係数を用いて $c_1\tilde{a}_1 + c_2\tilde{a}_2 + \cdots + c_l\tilde{a}_l = 0$ と書ける。よって $c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_la_l$ は第 1 成分を除いて 0 である。もし第 1 成分が 0 なら $a_1, a_2, \ldots, a_l$ は線形従属だし、第 1 成分が 0 でないなら $a_1, a_2, \ldots, a_l$ で張られる空間に第 1 単位基本ベクトルが属する。(補題 1 の証明終)

3　線形写像を使った証明

まずは線形写像とその双対を使った証明を述べる。

定義　線形空間 X の双対空間 X' は、X 上の線形汎関数全体として定義される。すなわち、$X' = \{s : X \to \mathbb{R} \mid s \text{ は線形 }\}$。

双対空間の双対空間 X'' は元の空間 X と同一視される。これは、 $a \in X$ に対して $a(s) := s(a)$ と定めることにより、$a : X' \to \mathbb{R}$ とみればよいのである。

これに対して、双対 X' は、元の X との間に全単射が存在するが同一視はできない。全単射は、基底の取り方に依存し、「標準的なもの」がないのだ。X の基底が $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ととれるとき、その双対基底 $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ を $a'_i(a_j) = \delta_{ij}$ で定める。ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ。双対基底の双対基底 $a''_1, a''_2, \ldots, a''_n$ は元の基底 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ と同じものになる。

線形写像 $T : X \to Y$ の双対 $T' : Y' \to X'$ を $T'(s) = s \circ T$ と定める。双対の双対 T'' は元の写像 T と同一視される。なぜなら、$a \in X'' = X$ に対して、$(T''(a))(s) = (a \circ T')(s) = a(T'(s)) = (T'(s))(a) = (s \circ T)(a) = s(T(a))$ となるから。

注: X の基底が $a_1, a_2, \ldots, a_m$, Y の基底が $b_1, b_2, \ldots, b_n$ とするとき, この基底の下で $T : X \to Y$ を行列に表すと $(b'_j(T(a_i)))_{ij}$ である。その双対基底の下で、双対 T' を行列に表すと $(a''_j(T'(b'_i)))_{ij} = (b'_i(T(a_j)))_{ij}$ であり、これは先ほどの行列の転置である。

行列 A から定まる線形写像 $T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を考える。すると、A は、$\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ の単位基本ベクトルからなる標準基底の下で T_A を行列で表したものである。縦ベクトルの線形独立な個数は、あきらかに T_A の像の次元である。また、T_A の核の次元と、連立１次方程式 $Ax = 0$ の解の自由度は同じものなので、核の余次元は全体次元 m マイナス自由度である。

上の注で述べたことから、T_A の双対 $T'_A : (\mathbb{R}^n)' \to (\mathbb{R}^m)'$ を標準基底の双対基底の下で行列で表すと転置 ${}^tA$ になる。したがって、横ベクトルの線形独立な個数は、T'_A の像の次元と一致する。

命題の証明のためには、次を示せばよい。「線形写像 $T : X \to Y$ と双対 $T' : Y' \to X'$ は、像の次元が等しい。」そのために、T の像の基底をひとつ定め、それを T' の像の基底へ移行できることを示せばよい。下の図式からわかるように、右上から左下に移行する経路には二通りある。その二通りにしたがって、証明も二通りある。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ X' & \xleftarrow[T']{} & Y' \end{array}$$

二つ目の証明の過程で、T の像の次元と、T の核の余次元が等しいことも示される。

命題の証明 1　T の像の基底を $a_1, a_2, \ldots, a_l$ とし、必要ならベクトルをつけくわえて Y の基底 $a_1, a_2, \ldots, a_l, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_{n-l}$ をつくる。その双対基底を $a'_1, a'_2, \ldots, a'_l, \tilde{a}'_1 \tilde{a}'_2, \ldots, \tilde{a}'_{n-l}$ とする。すると、$T'(a'_1), T'(a'_2), \ldots, T'(a'_l)$ は線形独立である。なぜなら、実数 c_i に対し $\sum_{i=1}^l c_i T'(a'_i) = 0$ ならば $\sum_{i=1}^l c_i a'_i \circ T = 0$、したがって任意の j について $0 = \sum_{i=1}^l c_i a'_i(a_j) = c_j$。これより、$T$ の像の次元は T' の像の次元を超えない：$\dim T(X) \leq \dim T'(Y')$。

T と T' の役割を換えれば $\dim T'(Y') \leq \dim T(X)$ もいえるので、これらは等しい。(命題の証明 1 終)

命題の証明 2　$b_1, b_2, \ldots, b_d$ を T の核 $\ker T$ の基底とし、それにいくらかベクトルを追加して $b_1, b_2, \ldots, b_d, \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_{m-d}$ が X の基底になるようにする。基底の作り方から、$T(\tilde{b}_1), T(\tilde{b}_2), \ldots, T(\tilde{b}_{m-d})$ は T の像の基底である。双対基底 $b'_1, b'_2 \ldots, b'_d, \tilde{b}'_1, \tilde{b}'_2 \ldots, \tilde{b}'_{m-d}$ を考えると、$b'_1, b'_2, \ldots, b'_d$ は T' の像に属さない。なぜなら、もし $b'_k = T'(c)$ となる c があったとすると、$1 = b'_k(b_k) = c \circ T(b_k) = c(0) = 0$ となって矛盾。したがって、T' の像の次元は、T の像の次元を超えない: $\dim T'(Y') \leq \dim T(X)$。

T と T' の役割を入れ替えれば $\dim T(X) \leq \dim T'(Y')$ もいえるので、これらは等しい。(命題の証明 2 終)

最後の箇所で役割を入れ替えるのではなく、二つの証明を組み合わせても所望の結果を得る。

商空間の概念を使うと、証明が簡潔になる。X の部分空間 W による商空間 X/W とは、X を同値関係 $x \sim y \iff x - y \in W$ で類別した同値類からなる線形空間のことである。X/W の元は $[a] = \{x \in X \mid a - x \in W\}$ という形をしており、$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, [a_1], [a_2] \in X/W$ に対し $c_1[a_1] + c_2[a_2] = [c_1 a_1 + c_2 a_2]$ である。$\dim X/W = \dim X - \dim W$ がわかる。線形写像 $T : X \to Y$ から、自然に線形写像 $\tilde{T} : X/\ker T \to Y$ が得られる。これは、$\tilde{T}([x]) := T(x)$ で定義される。$\tilde{T} : X/\ker T \to T(X)$ は全単射であることがわかる。これを準同型定理という。

部分空間 $W \subset X$ に直交する空間を $W^\perp = \{s \in X' \mid s(x) = 0, \forall x \in W\}$ と定義すると、$\dim W^\perp = \dim X - \dim W$ である。

先ほどの証明は、次のように書きなおせる。（役割を交換するくだりは省略。）

命題の証明 1 改　まず、$s \in T(X)^\perp \iff s(y) = 0, \forall y \in T(X) \iff s(T(x)) = 0, \forall x \in X \iff T'(s)(x) = 0, \forall x \in X \iff T'(s) = 0$ である。つまり $T(X)^\perp = \ker T'$。

このことより、$T' : Y' \to X'$ から自然に $\tilde{T}' : Y'/T(X)^\perp \to T'(Y')$ が定まり、全単射である（準同型定理）。よって $\dim T'(Y') = \dim Y'/T(X)^\perp = \dim Y' - (\dim Y - \dim T(X)) = \dim T(X)$。（命題の証明 1 改終）

命題の証明 2 改　$T : X \to Y$ から自然に定まる $\tilde{T} : X/\ker T \to T(X)$ は全単射である（準同型定理)。また、$s \in Y'$ と $x \in \ker T$ に対し $T'(s)(x) = s(T(x)) = 0$ なので $T'(Y') \subset (\ker T)^\perp$ がわかる。この二点より、$\dim T(X) = \dim X/\ker T = \dim X - \dim\ker T = \dim X' - \dim\ker T = \dim(\ker T)^\perp \geq \dim T'(Y')$。(命題の証明 2 改終)

二つの証明では、結局次のことを示していることになる。

- $T(X)^\perp = \ker T'$ と $T'(X) \cong Y'/T(X)^\perp$。元の証明では、$\tilde{T}'$ の単射性しか使っていなかった。
- $X/\ker T \cong T(X)$ と $T'(Y') \subset (\ker T)^\perp$。この $T'(Y') \subset (\ker T)^\perp$ は $T'(Y')^\perp \supset \ker T$ と同値である。

ほとんど同じではないか。どうも、このふたつの証明はわざわざ区別するほどの違いはなかったようである。

$\mathbb{R}^n$ に内積を導入すると、自分自身が双対空間となる。したがって、双対の概念を表に出さずとも証明できる。この証明の過程で、A の階数と ${}^t\!AA$ の階数が等しいことも示される。

命題の証明　T_A を 核の直交補空間 $W = (\ker T_A)^\perp$ に制限した $T_A|W : W \to T_A(\mathbb{R}^m)$ は明らかに単射であるが、全射でもある。なぜなら $a \in \mathbb{R}^m$ を $a = x + y, x \in \ker T_A, y \in W$ と分解すると $Aa = Ay$ だから。

$T_{{}^t\!A}$ を T_A の像 $T_A(\mathbb{R}^m) = T_A(W)$ に制限した $T_{{}^t\!A}|T_A(\mathbb{R}^m) : T_A(\mathbb{R}^m) \to T_{{}^t\!A}(\mathbb{R}^n)$ も単射である。なぜなら、${}^t\!AAa = 0$ であれば、$0 = {}^t a {}^t\!AAa = \|Aa\|$ なので $Aa = 0$ となる。

さらに、$T_{{}^t\!A}(\mathbb{R}^n) \subset W$ である。なぜなら、$a \in \ker T_A$ のとき ${}^t a {}^t\!Ab = {}^t(Aa)b = 0$ だから。

これらのことにより、

$$\dim W = \dim T_A(\mathbb{R}^m) = \dim T_{{}^t\!A} \circ T_A(\mathbb{R}^m) \leq \dim T_{{}^t\!A}(\mathbb{R}^n) \leq \dim W$$

となり、これらの次元はすべて等しいことが分かる。（命題の証明終)

証明の最後のところで、 $W = T_{{}^t\!A}(\mathbb{R}^n)$ もわかった。

4　小行列式を使った証明

次に、小行列式を使った命題の証明を述べる。階数を小行列式を使って定義することにちょっとした驚きがある。行と列を区別しない定義法なので、スマートに思える。しかしいざ命題を証明するときには少しもたついてしまう。

命題の証明　まず、正方行列 M に対し、その余因子行列を $\tilde{M}$ とすると $\tilde{M}M = M\tilde{M} = |M|E$ となることを思い出しておく。このことから、M の縦ベクトルが線形従属であれば $|M| = 0$ である ($Mu = 0$ となるベクトル u を考えればよい)。逆に、M の縦ベクトルが線形独立なら、それらで全空間を張るので $x \mapsto Mx$ が可逆。$Mx_i = e_i$ なるベクトル x_i をならべることで逆行列 M^{-1} が作れる。$|M||M^{-1}| = |E| = 1$ から $|M| \neq 0$ がわかる。

さて、A の r 次の小行列式で 0 でないものがあるとする。上で述べたことから、A の縦ベクトルで線形独立なものが r 個とれる。

反対に、A の縦ベクトルで l 個の線形独立なもの $a_1, a_2, \ldots, a_l \in \mathbb{R}^n$ があるとする。次元を考えて $l \leq n$ である。これらで張られる空間 $W = \langle a_1, a_2 \ldots, a_l \rangle$ に属さない $\mathbb{R}^n$ の単位基本ベクトルが少なくとも $n - l$ 個ある。一般性を失わず、$e_{l+1}, \ldots, e_n \notin W$ としてよい。こうして、$a_1, a_2, \ldots, a_l$ の最初の l 成分だけを考えた $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_l \in \mathbb{R}^l$ は線形独立である（上の補題 1 を参照)。これで 0 にならない l 次小行列式が得られた。

横ベクトルについても同じことがいえる。(命題の証明終)

証明するのに、行列式を定義しておかないといけないのが面倒である。しかし、証明を見直してみると、必ずしも小行列式を使う必要はないことがわかる。正方行列について、縦ベクトルが線形独立であることと、横ベクトルが線形独立であることが同値であればよいのである。

補題 2　正方行列 A について次は同値。

1. 右逆行列を持つ。
2. 左逆行列を持つ。
3. 縦ベクトルが線形独立。
4. 横ベクトルが線形独立。

補題 2 の証明　(2⇒3) $BA = E$ とする。このとき、$Au = 0$ となるベクトル u が存在すれば、$0 = u$ である。したがって A の縦ベクトルは線形独立。

(3⇒1) 縦ベクトル $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が線形独立なら、それらの線形結合で、単位基本ベクトルを表すことができる。したがって、$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} P = E$ となる P が存在する。

(1⇒4) と (4⇒2) も同様である。(補題 2 の証明終)

蛇足であるがもう一回証明を述べる。

命題の証明　A の r 次の「小行列」で正則なものがあるとする。補題 2 から、A の縦ベクトルで線形独立なものが r 個とれる。

反対に、A の縦ベクトルで l 個の線形独立なもの $a_1, a_2, \ldots, a_l \in \mathbb{R}^n$ があるとする。次元を考えて $l \leq n$ である。これらで張られる空間 $W = \langle a_1, a_2 \ldots, a_l \rangle$ に属さない $\mathbb{R}^n$ の単位基本ベクトルが少なくとも $n - l$ 個ある。一般性を失わず、$e_{l+1}, \ldots, e_n \notin W$ としてよい。こうして、$a_1, a_2, \ldots, a_l$ の最初の l 成分だけを考えた $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_l \in \mathbb{R}^l$ は線形独立である。これで正則な l 次「小行列」が得られた。

横ベクトルについても同じことがいえる。(命題の証明終)

5 標準形を使った証明

基本変形の定義、階段行列の定義、階段行列に変形できることの証明は省略する。（階段行列の段数の一意性は、下の証明に含まれている）

命題の証明　3種類の基本変形を施しても、縦ベクトルの線形独立な個数及び横ベクトルの線形独立な個数が変化しないことが証明できる。階段行列については、縦ベクトルの線形独立な個数と横ベクトルの線形独立な個数が一致することが簡単にわかる。(命題の証明終)

定義と証明をはしょってしまったせいで、もやもやしたものになってしまった。長ったらしくなるゆえ、基本変形や階段行列の定義はしたくない。基本変形を使うのをやめて、次のような証明はどうだろうか。

命題の証明　A の縦ベクトルを左から $a_1, a_2, \ldots, a_m$ とする。その線形独立な個数は l であるとする。$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq m$ を、$a_1, a_2, \ldots, a_{i_k}$ の線形独立な個数が k であるようとる。必要なら、線形独立なベクトルを右側に適当につけくわえて、n 次正方行列 $P = \begin{pmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots & a_{i_l} & * \end{pmatrix}$ が正則となるようにする。すると、$P^{-1}A$ の (i_k, k) 成分は 1 であり、第 1 列から第 $i_k - 1$ 列までの縦ベクトルは、最初の $k - 1$ 成分以外 0 である。(ここまでで、階段行列に直せたことになる。) 同じことを、$P^{-1}A$ の横ベクトルに行えば、

$$P^{-1}AQ^{-1} = \begin{pmatrix} E_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

というような標準形に直せる。E_l は l 次の単位行列である。

命題の証明を完成させるには、標準形が一意的であることを示せばよい。すなわち、正則行列 P, Q があって $P \begin{pmatrix} E_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{l'} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$ となれば $l = l'$ であることをいえばよい。$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}$ とおくと、$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ P_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である。もし $l' < l$ とすると、P の最初の l 列が線形従属になってしまう。(命題の証明終)

6　双線形形式を使った証明

行列 A から、双線形形式 $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ が、$F(x,y) = {}^t x A y$ と定義できる。$x = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots x_n \end{pmatrix}, y = {}^t\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{pmatrix}$ とすると $F(x,y)$ は変数 x_i, y_j $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ の 2 次多項式と考えられる。$F(x,y) = \sum_{k=1}^r s_k t_k$ と書き表すことができる。ただし、s_k は x_i $(1 \leq i \leq n)$ の 1 次式、t_k は y_j $(1 \leq j \leq m)$ の 1 次式である。そのようなものの中で r が最小のものを考える。

また、これは、適当な縦ベクトル b_k と横ベクトル c_k をつかって $A = \sum_{k=1}^r b_k c_k$ と表していることと同じである。$s_k = {}^t x b_k, t_k = c_k y$ とすればよい。

命題の証明　A の縦ベクトルの線形独立な個数を l とする。$A = \sum_{k=1}^r b_k c_k$ と書けていることと、A の縦ベクトルがすべて $b_1, b_2, \ldots, b_r$ の線形結合であることは同値なので $l = r$ である。(命題の証明終)

(2008/11/12)