2次形式の定義についての覚書

亀山敦

2022/5/19

この話では、ぜんぶ実数係数で考えることとする。

2次形式は、変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して

$$Q(x) = \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j$$

のような形の式として定義される。

また、ある双一次形式 $L(x, y)$ を用いて $Q(x) = L(x, x)$ と書ける関数だとしてもよい。この場合は、Q を何らかの有限次元線形空間 V 上の関数と考えている。基底により展開 $x = x_1 e_1 + \cdots x_n e_n \in V$ することにより、この係数たちの関数と思えば、最初の定義と同じものである。また、V を $\mathbb{R}^n$ と同一視すれば、$Q(x) = {}^t x A x$ と書けるものとしてもよい。ここで、A は n 次行列。

2次形式を考えることと、双一次形式を考えることはほぼ同じであり、$L(x, y)$ が対称な双一次形式であれば $Q(x) = L(x, x)$ で2次形式を得たあと、$L(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x + y) - Q(x) - Q(y))$ と、双一次形式が回復する。

双一次形式を定義するのは、x, y それぞれについて線形な関数と言えばすむが、同様に2次形式を定義するやりかたはないようだ。岩波書店の数学事典によると、$Q(x)$ が2次形式であることは、次の2条件をみたすことと同値。(1) 任意の実数 a と任意の $x \in V$ について $Q(ax) = a^2 Q(x)$、(2) $Q(x, y) - Q(x) - Q(y)$ は x, y について双一次形式。

まとめると、線形空間 V 上の2次形式を定義するには3通りあり

1. 基底をひとつ決めておき、$\mathbb{R}^n$ と同一視して $Q(x) = {}^t x A x$ の形のもの。
2. ある双一次形式 $L \in V^* \otimes V^*$ について $Q(x) = L(x, x)$。
3. (1)(2) をみたすもの。

もっとすっきりした定義がありそうだが。どこが不満かというと、1は基底をとらないといけないし、2は双一次形式から出発している (Q を直接計算して確かめ

られない)。これこれの関係式をみたすもの、として定義したいのだ。3 はそうなっているが、式がふたつあるのが不満。(2) だけですめばよいがそうはならない。

ちょっと考えてみて、(1) の条件は (1')「任意の $x \in V$ について $Q(2x) = 4Q(x)$」とできることはすぐわかるが、なくすことはできない。(2) の条件だけをみたす Q は、2 次形式と、加群準同型写像の和の形である。

証明はまったく簡単であるが、念の為、これらを示そう。

Q が (2) をみたすとして、$L(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$ とおく。(1') の下で、$Q(x) = L(x,x)$ であればよいが、実際 $L(x,x) = \frac{1}{2}(Q(2x) - 2Q(x)) = Q(x)$。

(1') を仮定しない場合は次のようになる。$P(x) = Q(x) - L(x,x)$ とおく。L が双一次形式なので、$P(x+y) - P(x) - P(y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y) - L(x+y, X+y) - L(x,x) - L(y,y) = 2L(x,y) - L(x+y, X+y) - L(x,x) - L(y,y) = 0$ である。したがって、$P : V \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{Q}$ 加群としての準同型。$Q(x) = L(x,x) + P(x)$ となる。

補足 (蛇足)。(1') は次の条件に置き換えられる。(1") ある 1 以外の代数的数 $a \in \mathbb{R}$ があり、任意の $x \in V$ に対し $Q(ax) = a^2 Q(x)$。実際、Q が (1")(2) をみたすとしよう。上のように、$Q(x) = P(x) + L(x,x)$ と分解されているとすると、$P(ax) = a^2 P(x)$ である。a の最小多項式を $F(X)$ とする。$0 = P(F(a)x) = F(a^2)P(x)$ である。下で示すように、$F(a^2) \neq 0$ なので、$P(x) = 0$ がわかる。もし $F(a^2) = 0$ ならば 多項式 $F(X^2)$ は $F(X)$ で割り切れる。帰納的に、$F(X^{2^m}), m \in \mathbb{N}$ は $F(X)$ で割り切れ、a^{2^m} は $F(X) = 0$ の解である。これが成り立つためには $|a| = 1$ となる必要があり、可能性としては $a = -1$ しかない。しかし、$X^2 + 1$ は $X + 1$ で割り切れないので、ありえない。