ロピタルの定理の証明

平成 17 年 5 月 20 日

コーシーの平均値の定理を使わない証明を記す (平均値の定理は最後のところで使っている). 平均値の定理が直感的に理解しやすいのに比べて, コーシーの平均値の定理はその意味がすぐに理解できないようなので, 本証明を書きとめておく意味があると思う.

定理 1 f, g は開区間 (a, b) で微分可能とする. さらに, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ であり, (a, b) で $g' = 0$ とならないとする. このとき, $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ が存在すれば $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ と一致する.

定理 1’ f, g は開区間 (a, b) で微分可能とする. さらに, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ であり, (a, b) で $g' = 0$ とならないとする. このとき, $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ が存在すれば $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ と一致する.

定理 1 (1’) は次の定理 2 (2’) から導かれる.

定理 2 $f(x)$ は (a, ∞) で微分可能とする. もし $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ が存在すれば $\lim_{x\to\infty} f(x)/x$ と一致する.

定理 2’ $f(x)$ は $(0, a)$ で微分可能で $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ とする. もし $\lim_{x\to 0} f'(x)$ が存在すれば $\lim_{x\to 0} f(x)/x$ と一致する.

定理 2 から定理 1 の証明：定理 1 の仮定の下, $g(x)$ は単調なので逆関数が存在する. $F(t) = f(g^{-1}(t))$ とおくと

$$F'(t) = f'(g^{-1}(t))/g'(g^{-1}(t))$$

である. 仮定の下, $\lim_{t\to\infty} F'(t)$ が存在し, 定理 2 により

$$\lim_{t\to\infty} F(t)/t = \lim_{t\to\infty} f(g^{-1}(t))/g(g^{-1}(t)) = \lim_{x\to a} f(x)/g(x)$$

と一致する.

定理 2’ から定理 1’ の証明も同様.

定理 2 の証明：$L = \lim_{x\to\infty} f'(x)$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して, 十分大きな x で $(L-\epsilon)x < f(x) < (L+\epsilon)x$ を示せばよい.

十分大きな x_0 をとれば, $L - \epsilon/2 < f'(x) < L + \epsilon/2 \quad (x > x_0)$ となる. よって, 平均値の定理より

$$(L+\epsilon/2)(x-x_0) < f(x) - f(x_0) < (L+\epsilon/2)(x-x_0)$$

となる．これより明らか。

定理 2' の証明：$f(x)$ は $[0,a]$ で連続なので, 平均値の定理を $[0,x]$ に適用して $f(x)/x = f'(c)$ となる $0 < c < x$ があることからわかる．(証明終)

メモ　コーシーの平均値の定理を陽に使わず, ロピタルの定理を証明してみたが, 本質的にはコーシーの平均値の定理と同じことをやっている．それは次の二点を考えてみれば納得するだろう.

・ $(x,y) = (g(t), f(t))$ とパラメータ表示される関数 $y = y(x)$ は $y(x) = f(g^{-1}(x))$ と書け, 微分すると $dy/dx = f'(t)/g'(t)$ となる.

・ コーシーの平均値の定理は, $(x,y) = (g(t), f(t))$ とパラメータ表示される関数 $y = y(x)$ についての平均値の定理である.