レポート問題

注意：どの問題に関しても、あまり詳しいところまで計算することはない。だいたいのところを計算し、正しい論理で説明できていればよしとする。

1. 1次元微分方程式

$$\dot{x} = -1 + rx + e^x \quad (r \text{ はパラメータ})$$

のおおよその分岐の様子を調べ、おおよその分岐図を描きなさい (r - x 平面にどのパラメータでどんな平衡点が現れるか図示せよ)。

2. 1次元微分方程式

$$\dot{x} = a + rx + \frac{1}{1+x^2} \quad (a, r \text{ はパラメータ})$$

のおおよその分岐の様子を調べ、おおよその分岐図を描きなさい (a - r 平面に分岐が起こるパラメータを図示せよ)。

自力で解くのが難しい場合は、以下のヒントを参考にすること。計算だけで腕づくで解こうとすると膨大な計算が必要となる。よく頭を使うこと。計算機を使用してもよい。

- $y = \frac{1}{1+x^2}$ のグラフの概形は？ 傾きの最大値と最小値は？
- $|r|$ がある程度大きいときは、分岐が起こらない？
- $f(x, a, r) = a + rx + \frac{1}{1+x^2}$ において、 $f(x, a, r) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, a, r) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, a, r) = 0$ となる x があるのはどんな a, r ? 今求めた x, a, r のまわりで $f(x, a, r)$ をテーラー展開してみると？
- r が 0 に近いとする。 $\frac{\partial}{\partial x} f(x, a, r) = 0$ となる x はふたつある (グラフを思い出そう)。その x を r を使った近似式 $x \approx kr^\alpha$ (r が 0 に近いとき) で表すと k, α は？ そのふたつの x を x_1, x_2 とすると、分岐図は曲線 $f(x_i, a, r) = 0$ であることを確かめよう。その曲線上で $r \rightarrow 0$ のとき a はどこに近づく？