

代数学I 講義計画

木曜日 4 限目 全共 3 5 教室

担当教員：亀山敦（オフィスアワーとして木曜日午前 10 時 30 分から午後 2 時 30 分を設定します。亀山の部屋—工学部 A631 にて質問を受け付けます）

教科書：線形代数入門, 兼山瓊典他著, 2007, 学術図書出版

成績評価：試験とレポートによる。ただし、講義中に行う演習、小テストなどの結果を考慮することもある。

岐阜大学 AIMS (<https://aims.gifu-u.ac.jp/>) にて、情報を配布することがあるのでアクセスできるようにしておくこと。

以下の講義計画表には明記しないが、理解度合を見て、適宜、演習・小テストを実施する。したがって、計画からはいくらかのずれが生じることがある。

1-2 週目 [平面と空間のベクトル]

空間のベクトルを座標で表し、いろいろな演算（足し算、スカラー倍、内積、外積）をする。

空間内の直線・平面は式で表すことができる。

問題例：空間の 2 点 $(1, 2, 3)$, $(9, 8, 7)$ を通る直線の方程式は？

問題例：空間の 2 平面 $x + y + z = 10$, $2x - 3y + 4z = 1$ のなす角度は？ この 2 平面の交線の方程式は？

ここでの話題は、高校で学習した、数学 B の「ベクトル」、数学 II の「図形と方程式」に深い関係がある。高校の教科書を取り出して、復習しておくといよい。また、余弦定理も思い出しておこう。

3-4 週目 [数ベクトルの空間]

数ベクトルというのは、数を何個か並べたもの。平面や空間の点の位置を座標であらわすのも、数ベクトルの一種。

ここではベクトル空間、部分空間、空間の次元、線形独立といったような概念がでてきて少し抽象的な考え方を要求される。

いくつかのベクトルがあったとき、そのうちのどれかひとつが、他のベクトルを使って表せるような状態を、線形従属という。そうでないときは線形独立という。

たとえば、3 次元空間の 4 つのベクトル

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{a}_3 = (0, 0, 1), \mathbf{a}_4 = (1, 2, 3)$$

を考えよう。 $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + 3\mathbf{a}_3$ となるので線形従属である。 $\mathbf{a}_4$ を除いて、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ だけを考えれば線形独立。また、 $\mathbf{a}_3$ を除いて、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4$ を考えても線形独立である。

実は、空間の次元は、線形独立という概念と深いかわりがある。3次元空間では、上で見たように、線形独立になる三つのベクトルが簡単に見つかるが、ベクトルを四つ集めてくるといつでも線形従属になる。

例題はたくさんありますが、一度、連立方程式の解き方を勉強してからの方がわかりやすいかも。

問題例： $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ は線形独立？ 線形従属？

問題例： $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間の次元は？

5-6 週目 [行列] ここでは、行列の演算と、いくつかの概念について学ぶ。

高校における数学 C「行列とその応用」を復習しておくとうい。

問題例： $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ としたとき、 A^{10} を求めよ。

7-9 週目 [基本変形と連立 1 次方程式] 連立 1 次方程式を解くことが目標となる。

中学校で習った連立 1 次方程式の解法と、高校で習った行列を使って解く方法を思い出しておこう。

方程式が複雑になると、中学校で習ったような変数を消去していくやり方ではミスが多く使い物にならない。行列の基本変形による解法を修得しよう。解の自由度という重要な概念も学ぶ。

11-14 週目 [行列式] 行列式という量は、連立 1 次方程式を解くとき自然に出てくる。これは、逆行列があるかを判定する量でもある。また、幾何学的な意味をも持つし、解析学において変数変換の際にヤコビアンとして現れる。

一般的に定義しようとする、多少抽象的なところがあって苦労するが、実際に計算するのは、アルゴリズムに従えばやさしい。