微分方程式レポート問題　解答例

1.　(a) $y' = e^{x-y}$.

両辺に e^y をかけて

$$e^y y' = e^x$$

両辺を x で不定積分すると

$$\begin{aligned} \int e^y y' dx &= \int e^x dx \\ \int e^y dy &= \int e^x dx \\ e^y &= e^x + c \quad (c \text{ は定数}) \\ y &= \log(e^x + c) \end{aligned}$$

したがって、解は

$$y = \log(e^x + c) \quad (c \text{ は任意の実数}).$$

ただし、y が実数であるためには $e^x + c > 0$ でなければならない. よって x の範囲は $\begin{cases} x > \log(-c) & (c \text{ が負のとき}) \\ \text{実数全体} & (c \text{ が非負のとき}) \end{cases}$ である.

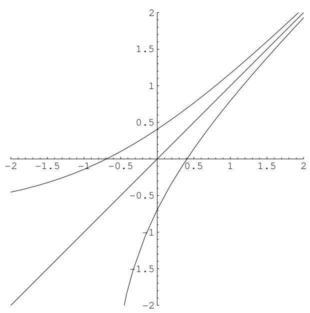

図 1: $c = -1/2, 0, 1/2$ の場合.

(b) $xy' = y(1-y)$.

y が恒等的に 0 のとき及び恒等的に 1 のときは、方程式が満たされるので解である。

$y \neq 0, 1$ のとき、両辺を $xy(1-y)$ で割って

$$\frac{y'}{y(1-y)} = \frac{1}{x}$$

両辺を x で不定積分すると

$$\begin{array}{rcl}
\int \frac{y'}{y(1-y)}dx & = & \int \frac{dx}{x} \\
\int \frac{dy}{y(1-y)} & = & \int \frac{dx}{x} \\
\int \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}dy & = & \int \frac{dx}{x} \\
\log|y| - \log|1-y| & = & \log|x| + c_0 \quad (c_0 \text{ は定数}) \\
\frac{y}{1-y} & = & c_1 x \quad (c_1 = \pm e^{c_0}) \\
y & = & \frac{c_1 x}{1+c_1 x}
\end{array}$$

ただし、y が実数であるために $c_1 x \neq -1$ でなければならない．よってこの場合の x の範囲は $x \neq -1/c_1$ である。

まとめると、解は

$$\left\{\begin{array}{rcl}
y & = & 0 \\
y & = & 1 \\
y & = & \frac{c_1 x}{1+c_1 x} \quad (y \text{ は } x \neq -1/c_1 \text{ で定義される．} c_1 \text{ は } 0 \text{ 以外の実数})
\end{array}\right.$$

となる。

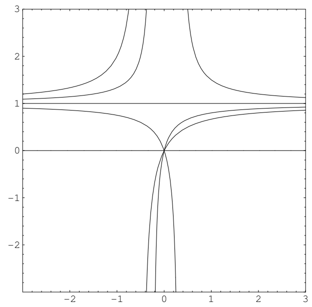

図 2: $y = 0, 1$ および $c = -3, 2, 4$ の場合.

注意１：方程式を変形する際、x で割っているので、求めた解 $y = \frac{c_1 x}{1+c_1 x}$ の定義域に 0 を含めるには、本来なら多少の議論が必要である．この場合、$y = \frac{c_1 x}{1+c_1 x}$ は $x = 0$ で自然に定義され、方程式を満たしているので、定義域に 0 を含めてもよいのである.

注意２：この方程式の初期値問題

$$\left\{\begin{array}{rcl}
xy' & = & y(1-y) \\
y(x_0) & = & y_0
\end{array}\right.$$

を考えるときは、x の範囲に少し注意が必要である。$x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, y_0 \neq 1$ のときを考える．$y = \frac{c_1 x}{1+c_1 x}$ に $y = y_0, x = x_0$ を代入すると $c_1 = \frac{y_0}{x_0(1-y_0)}$ が得られる．よって解として

$$y(x) = \frac{\frac{y_0}{x_0(1-y_0)}x}{1 + \frac{y_0}{x_0(1-y_0)}x}$$

を得る．x の範囲は $-1/c_1$ を境に $x < -1/c_1$ と $x > -1/c_1$ に分かれる．ひとつの連続な解を求めるには、これらのうち、x_0 を含んでいる範囲を選ばねばならない！今回のケースでは

$$\begin{aligned} x_0 < -1/c_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_0 < -\tfrac{x_0(1-y_0)}{y_0} \\ &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{x_0}{y_0} < 0 \end{aligned}$$

となるので、x_0 と y_0 の正負が異なるとき、x の範囲は $x < -1/c_1$ であり, x_0 と y_0 の正負が同じとき、x の範囲は $x > -1/c_1$ である.

2. (a) $x \log x(y' - 1) + x - y = 0, y(2) = 1$

方程式を変形して

$$y' - \frac{1}{x \log x} y = 1 - \frac{1}{\log x}. \tag{1}$$

これは線形方程式なのでまず同次形

$$y' - \frac{1}{x \log x} y = 0$$

を解くと

$$\begin{aligned} y &= ce^{\int \frac{dx}{x \log x}} \quad (c \text{ は定数}) \\ &= ce^{\log|\log x|} \\ &= c|\log x| \\ &= c \log x. \end{aligned}$$

ラグランジュの定数変化法により

$$y(x) = c(x) \log x \tag{2}$$

とおいて解を求める．(2) と

$$y' = c' \log x + \frac{c}{x}$$

を (1) に代入して

$$c' \log x + \frac{c}{x} - \frac{1}{x \log x} c \log x = 1 - \frac{1}{\log x}$$

変形すると

$$c' = \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$$

より

$$\begin{aligned} c &= \int \tfrac{\log x - 1}{(\log x)^2} dx \\ &= \tfrac{x}{\log x} + c_0 \end{aligned}$$

となる．よって一般解は

$$y = x + c_0 \log x$$

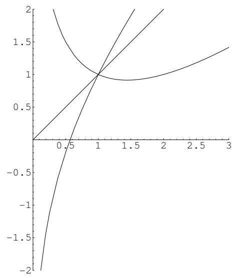

図 3: $c_0 = -1/\log 2, 0, 1$ の場合.

である. 初期条件 $y(2) = 1$ より、$1 = 2 + c_0 \log 2$. よって $c_0 = -1/\log 2$.
求める解は

$$y = x - \log x / \log 2.$$

注意： $\frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$ の積分.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log x - 1}{(\log x)^2} dx &= \int (\frac{1}{\log x})' x(1 - \log x) dx \\
&= \frac{1}{\log x} x(1 - \log x) - \int \frac{1}{\log x} (x(1 - \log x))' dx \\
&= \frac{x}{\log x} - 1 - \int \frac{1}{\log x} (1 - \log x + x(-\frac{1}{x})) dx \\
&= \frac{x}{\log x} - 1 + \int dx \\
&= \frac{x}{\log x} + c
\end{aligned}$$

(b) $y' + 2y \tan x = \cos^2 x, y(0) = 1$

まず同次形

$$y' + 2y \tan x = 0$$

を解くと

$$\begin{aligned}
y &= ce^{-2\int \tan x dx} \\
&= ce^{2 \log |\cos x|} \\
&= c \cos^2 x.
\end{aligned}$$

ラグランジュの定数変化法により

$$y = c(x) \cos^2 x$$

とおいて解を求める. (a) と同様にして

$$c' = 1$$

を得る. これより

$$c = x + c_0.$$

よって一般解は

$$y = x \cos^2 x + c_0 \cos^2 x. \tag{3}$$

初期条件 $y(0)=1$ より $1=c_0\cos^2 0$. したがって $c_0=1$. 求める解は

$$y=(x+1)\cos^2 x.$$

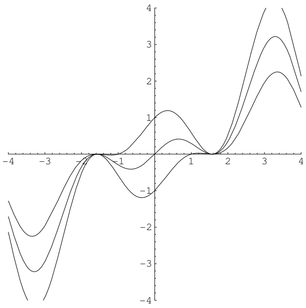

図 4: $c_0=-1,0,1$ の場合.

注意：$\tan x$ は $x=\pi/2+n\pi$ (n は整数) で発散しているので初期値問題の解の定義域としては $-\pi/2<x<\pi/2$ とするのが無難である. しかし、(3) は実数全体で定義されているし、次問の注意 2 で考察するような極限操作により、$x=\pi/2+n\pi$ においても問題の方程式をみたしていると考えられる. したがって、解の定義域は実数全体としても間違いではない.

ただし、その場合初期値問題の解はひとつだけではない. $x=\pi/2+n\pi$ において「乗り換え」が可能となる. たとえば、

$$y=\begin{cases}(x+1)\cos^2 x & (x\le\pi/2)\\(x+10)\cos^2 x & (x>\pi/2)\end{cases}$$

等も初期値問題の解となる.

3. (a) $y'=\cos^2\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$ $(u=\frac{y}{x})$

$u=\frac{y}{x}$ を微分して $u'=(y'x-y)/x^2$. この式に、問題の方程式と $y=ux$ を代入して y を消去すると

$$\begin{aligned}u' &= \tfrac{(\cos^2 u+u)x-ux}{x^2}\\ &= \tfrac{\cos^2 u}{x}\end{aligned}$$

$\cos^2 u=0$ となるのは $u=(n+1/2)\pi$ (n は整数) のとき. このとき $u=(n+1/2)\pi$ は解である.

$\cos^2 u\neq 0$ のとき両辺を $\cos^2 u$ で割って

$$\frac{u'}{\cos^2 u}=\frac{1}{x}$$

両辺を x で不定積分すると

$$\begin{aligned}
\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx &= \int \frac{dx}{x} \\
\int \frac{du}{\cos^2 u} &= \int \frac{dx}{x} \\
\tan u &= \log|x| + c \quad (c \text{ は定数}) \\
u &= \tan^{-1}(\log|x| + c) + n\pi
\end{aligned}$$

したがって、解は

$$\begin{cases} u = (n+1/2)\pi \\ u = \tan^{-1}(\log|x| + c) + n\pi \end{cases}$$

（c は実数, n は整数）.

元の方程式の解は

$$\begin{cases} y = (n+1/2)\pi x \\ y = x\tan^{-1}(\log|x| + c) + n\pi x \end{cases}$$

（c は実数, n は整数）.

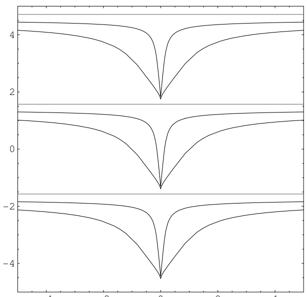

図 5: u のグラフ.

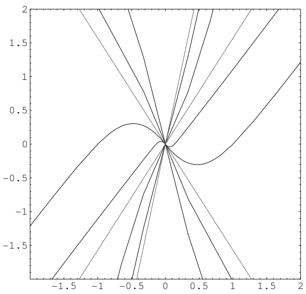

図 6: y のグラフ.

注意１：逆三角関数 $\tan^{-1} x$ は $\tan x$ の逆関数のうち、値域が $-\pi/2 < y < \pi/2$ となるものである。そのため、$a = \tan b$ を満たす b は $b = \tan^{-1} a + n\pi$ （n は整数）と表すことができる。

（例　$1 = \tan b$ となる b は $b = \tan^{-1} 1 + n\pi = \pi/4 + n\pi$）

注意２： $\log|x|$ は $x = 0$ では定義されていないため、解

$$y = x \tan^{-1}(\log|x| + c) + n\pi x \tag{4}$$

も $x = 0$ では定義されていない．また、問題の微分方程式には x による割り算が含まれるので解は $x = 0$ を除いた範囲で考えるべきである．よって、論理的には (4) の定義域は $x \neq 0$ であるというべきであろう。

しかし、この問題の場合は次のように $x = 0$ においても微分方程式をみたしていると考えられるので、(4) の定義域は実数全体であるといっても間違いではない．（問題の解答としては、どちらを答えてもよい）

まず、

$$\lim_{x \to 0} \tan^{-1}(\log|x| + c) = -\pi/2$$

となるため、$y(0) = 0$ と定義すると y は実数全体で連続な関数になる．すると、

$$y'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{y(h) - 0}{h} = -\pi/2 + n\pi.$$

一方、

$$\lim_{x \to 0}(\cos^2 \frac{y}{x} + \frac{y}{x}) = \cos^2(-\pi/2 + n\pi) + (-\pi/2 + n\pi) = -\pi/2 + n\pi$$

となり、$x = 0$ においても、(4) は問題の微分方程式をみたしているとみなせる．

4. $y' = ay + bxy^{-2}$ $(u = y^3)$

   $u = y^3$ を x で微分して $u' = 3y'y^2$．この式に問題の微分方程式と $u = y^3$ を代入して y を消去すると、

$$u' = 3au + 3bx$$

   まず、$a = 0$ のときを考える．$u' = 3bx$ より $u = 3bx^2/2 + c$ なので一般解は

$$y = (\frac{3}{2}bx^2 + c)^{1/3}.$$

   次に $a \neq 0$ の場合．線形方程式なので、まず同次形

$$u' = 3au$$

   を解くと

$$u = ce^{3ax} \quad (c \text{ は定数})$$

   ラグランジュの定数変化法により

$$u(x) = c(x)e^{3ax}$$

とおいて解を求める．$u = ce^{3ax}$ と $u' = c'e^{3ax} + 3ace^{3ax}$ を方程式に代入して

$$c' = 3bxe^{-3ax}$$

を得る．これより

$$c = -\frac{b}{a}e^{-3ax}x - \frac{b}{3a^2}e^{-3ax} + c_0 \quad (c_0 \text{ は定数}).$$

したがって

$$u = -\frac{b}{a}x - \frac{b}{3a^2} + c_0 e^{3ax}.$$

元の方程式の解は

$$y = (-\frac{b}{a}x - \frac{b}{3a^2} + c_0 e^{3ax})^{1/3}.$$

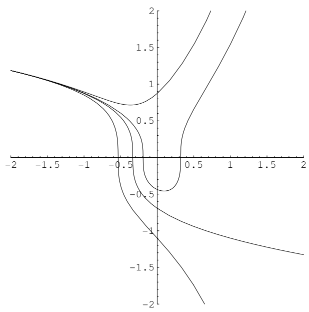

図 7: $a = b = 1$ のとき．$c_0 = -1, 0, -1/4, 1$ の場合.

注意：得られた解において、$y = 0$ になるときは y' が発散しているのでそのような x を定義域からはずしてもよい.

しかし、前問に近い議論により、y^2y' が収束し $ay^3 + bx$ と等しくなることから方程式を満たすと考え、実数全体が定義域であるとしてよい.