力学系練習問題 解答例

1. (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値は $-1, 1$(重根). -1 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 1 に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. したがって基本解は $e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{t}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり一般解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{t}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ は任意の実数})$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルは $1, 2 \pm i$ 及び $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \mp i \\ -3 \pm i \\ 2 \end{pmatrix}$. したがって基本解は $e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{2t}\left(\cos t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), e^{2t}\left(\sin t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ となり一般解は

$$c_1 e^{t}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t}\left(\cos t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + c_3 e^{2t}\left(\sin t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$(c_1, c_2, c_3$ は任意の実数)

(3) まず特性方程式 $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0$ の解を求める. ヒントより $1 + i$ を解に持つので, $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4$ は因子に $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ を持つことがわかり $(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2$ と因数分解される. したがって特性方程式の解は $1 \pm i$ でそれぞれ 2 重根. よって基本解は $e^t \cos t, e^t \sin t, te^t \cos t, te^t \sin t$ で一般解は

$$c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t + c_3 te^t \cos t + c_4 te^t \sin t \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \text{ は任意の実数})$$

2. (1) まず同次形

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x + 4y \\ \dot{y} &= 2x + y \end{cases}$$

の一般解を求める. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルは $-1, 5$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので一般解は

$$c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の実数})$$

次に

$$\begin{cases} \dot{x} &= 3x+4y+1 \\ \dot{y} &= 2x+y+t \end{cases}$$

の一般解を求める．特殊解を求めるため $x = at+b, y = ct+d$ とおいて代入すると $a = 3(at+b)+4(ct+d)+1, c = 2(at+b)+(ct+d)+t$ である．t の係数と定数項を比較することにより $a = -4/5, b = 21/25, c = 3/5, d = -27/25$ となり特殊解

$$x = -\frac{4}{5}t + \frac{21}{25},\ y = \frac{3}{5}t - \frac{27}{25}$$

を得る．よって一般解は

$$c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2 e^{5t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}t+\frac{21}{25}\\ \frac{3}{5}t-\frac{27}{25}\end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の実数})$$

である．

初期条件をみたす c_1, c_2 を求めるため $t=0$ を代入すると

$$c_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{21}{25}\\ -\frac{27}{25}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

これを解いて $c_1 = -1, c_2 = 2/25$. 求める解は

$$e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{25}e^{5t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\frac{4}{5}t+\frac{21}{25}\\ \frac{3}{5}t-\frac{27}{25}\end{pmatrix}$$

(2) まず同次形

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= 2x+2y \end{cases}$$

の一般解を求める．$A = \begin{pmatrix}0 & -1\\2 & 2\end{pmatrix}$ の固有値, 固有ベクトルは $1 \pm i, \begin{pmatrix}1 \mp i\\-2\end{pmatrix}$ なので一般解 は

$$c_1 e^t\left(\cos t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} - \sin t\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right) + c_2 e^t\left(\sin t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \cos t\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right) \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の実数})$$

次に

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y+\cos t \\ \dot{y} &= 2x+2y+\sin t \end{cases}$$

の一般解を求める．特殊解を求めるため $x = a\cos t + b\sin t, y = c\cos t + d\sin t$ とおいて代入すると

$$\begin{aligned} -a\sin t + b\cos t &= -(c\cos t + d\sin t) + \cos t \\ -c\sin t + d\cos t &= 2(a\cos t + b\sin t) + 2(c\cos t + d\sin t) + \sin t \end{aligned}$$

である．係数を比較することにより $a=-6/5, b=2/5, c=3/5, d=-6/5$ となり特殊解

$$x=-\frac{6}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t,\ y=\frac{3}{5}\cos t-\frac{6}{5}\sin t$$

を得る．よって一般解は

$$c_1e^t\left(\cos t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}-\sin t\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)+c_2e^t\left(\sin t\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\cos t\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t\\\frac{3}{5}\cos t-\frac{6}{5}\sin t\end{pmatrix}$$

(c_1, c_2 は任意の実数) である．

初期条件をみたす c_1, c_2 を求めるため $t=0$ を代入すると

$$c_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

これを解いて $c_1=3/10, c_2=-9/10$. 求める解は

$$\frac{1}{5}\left(e^t\cos t\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}+e^t\sin t\begin{pmatrix}-3\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\cos t+2\sin t\\3\cos t-6\sin t\end{pmatrix}\right)$$

(3) まず同次形 $\dddot{x}+x=0$ の一般解を求める．特性方程式 $\lambda^3+1=0$ の解は $-1, \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ なので一般解は

$$c_1e^{-t}+c_2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\quad (c_1, c_2, c_3\ \text{は任意の実数})$$

次に $\dddot{x}+x=te^{-t}$ の一般解を求める．特殊解を求めるため $x=(at^2+bt)e^{-t}$ とおいて代入すると

$$-6ae^{-t}+3(2at+b)e^{-t}-(at^2+bt)e^{-t}+(at^2+bt)e^{-t}=te^{-t}$$

係数を比較することにより $a=1/6, b=1/3$ となり特殊解

$$\left(\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{3}t\right)e^{-t}$$

を得る．よって一般解は

$$c_1e^{-t}+c_2e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+c_3e^{t/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t+\left(\frac{1}{6}t^2+\frac{1}{3}t\right)e^{-t}\quad (c_1, c_2, c_3\ \text{は任意の実数})$$

である．

初期条件をみたす c_1, c_2, c_3 を求めるため, 一般解と, その一階微分, 二階微分に $t=0$ を代入すると

$$\begin{aligned}c_1+c_2&=0\\-c_1+\frac{1}{2}c_2+\frac{\sqrt{3}}{2}c_3+\frac{1}{3}&=0\\c_1-\frac{1}{2}c_2+\frac{\sqrt{3}}{2}c_3-\frac{1}{3}&=0\end{aligned}$$

これを解いて $c_1 = 2/9, c_2 = -2/9, c_3 = 0$. 求める解は

$$-\frac{2}{9}e^{t/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \left(\frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{3}t + \frac{2}{9}\right)e^{-t}$$

3. (1) $z = x + y$ を微分して $\dot{z} = \dot{x} + \dot{y}$. 方程式の二つの式を代入数すると

$$\dot{z} = -2tx - 2ty = -2tz$$

と z についての微分方程式を得る．これを解くと

$$z = c_1 e^{-t^2} \quad (c_1 \text{ は任意の実数})$$

(2) $x + y = c_1 e^{-t^2}$ より $y = -x + c_1 e^{-t^2}$. これを方程式の第１式に代入して

$$\dot{x} = -2tx + c_1 t e^{-t^2}$$

この x に関する微分方程式を解くと

$$x = \frac{1}{2}c_1 t^2 e^{-t^2} + c_2 e^{-t^2} \quad (c_2 \text{ は任意の実数})$$

よって y は

$$y = -\frac{1}{2}c_1 t^2 e^{-t^2} + c_1 e^{-t^2} - c_2 e^{-t^2}$$

あわせて求める一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{2}t^2 + 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t^2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の実数})$$

4. (1) $\dot{u} = (1-t)e^{t-t^2/2}x + e^{t-t^2/2}\dot{x}, \dot{v} = (1-t)e^{t-t^2/2}y + e^{t-t^2/2}\dot{y}$ に方程式の二つの式を代入して

$$\begin{cases} \dot{u} &= -2v \\ \dot{v} &= 2u \end{cases}$$

を得る．一般解は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の実数})$$

(2)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-t+t^2/2}\left(c_1\begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}\right) \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の実数})$$