力学系　再試験の解答例

この解答は, 途中の計算を適宜省略した略解です。試験の答案に書く際は、もう少し丁寧に書くほうが望ましい。

1. (a) 同次形

$$\dddot{x} - x = 0$$

の特性方程式

$$\lambda^3 - 1 = 0$$

の根は

$$\lambda = 1, -1/2 \pm 3i/2$$

である. したがって, 同次形の一般解は

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2} \sin(3t/2) + c_3 e^{-t/2} \cos(3t/2)$$

(c_1, c_2, c_3 は任意の実数) である. 特殊解を求めるため, 非同次項 $\sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$ であることに注意して $x = a\cos 2t + b \sin 2t$ とおいて元の方程式に代入する.

$$(8a \sin 2t - 8b \cos 2t) - (a \cos 2t + b \sin 2t) = \frac{1}{2} \sin 2t$$

変形して

$$(8a - b - \frac{1}{2}) \sin 2t + (-8b - a) \cos 2t = 0$$

これをみたす a, b は

$$\begin{cases} 8a - b - \frac{1}{2} & = & 0 \\ -8b - a & = & 0 \end{cases}$$

を解いて

$$a = 4/65,\ b = -1/130$$

である. よって, 求める一般解は

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t/2} \sin(3t/2) + c_3 e^{-t/2} \cos(3t/2) + \frac{4}{65} \cos 2t - \frac{1}{130} \sin 2t$$

(c_1, c_2, c_3 は任意の実数) である.

(b) 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値は $-1, 4$, 対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ なので, 同次形

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(c_1, c_2は任意の実数) である．問題の方程式の特殊解は，

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \tag{2}$$

の特殊解の和である．特殊解を求めるため，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を (1) に代入すると，

$$e^{2t} \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみたす $a = 0, b = -1/2$ を得る． これで (1) の特殊解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{2t}/2 \end{pmatrix}$ を得た．同様に，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}$ を (2) に代入し，

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

t の次数で整理して

$$t \begin{pmatrix} a+2c \\ 3a+2c+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b+2d-a \\ 3b+2d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これをみたすには，$a = -1/2, c = 1/4, b = 3/8, d = -7/16$. (2) の特殊解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4}t - \frac{7}{16} \end{pmatrix}$ を得た．問題の方程式の特殊解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{4}t - \frac{7}{16} \end{pmatrix}$$

となるので求める一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{4}t - \frac{7}{16} \end{pmatrix}$$

(c_1, c_2は任意の実数) である．

2. 第三式は未知関数が z だけなので単独で解けて, 一般解は

$$z = \alpha e^{-t} + te^{-t} \ (\alpha \text{ は任意の実数})$$

となる. 初期条件をみたす解は

$$z = ce^{-t} + te^{-t}$$

である. これを第二式に代入すると, 未知関数 y のみの方程式

$$\dot{y} = -y + ce^{-t} + te^{-t}$$

を得る. これを解いて, 一般解は

$$y = \alpha e^{-t} + cte^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t} \ (\alpha \text{ は任意の実数})$$

となる. 初期条件をみたす解は

$$y = be^{-t} + cte^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$$

である. これと先ほど求めた z を第一式に代入すると未知関数 x の方程式

$$\dot{x} = -x + (b+c)e^{-t} + (c+1)te^{-t} + \frac{1}{2}t^2 e^{-t}$$

を得る. これを解いて一般解は

$$x = \alpha e^{-t} + (b+c)te^{-t} + \frac{1}{2}(c+1)t^2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^3 e^{-t} \ (\alpha \text{ は任意の実数})$$

初期条件をみたす解は

$$x = ae^{-t} + (b+c)te^{-t} + \frac{1}{2}(c+1)t^2 e^{-t} + \frac{1}{6}t^3 e^{-t}$$

である. 以上まとめて,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x &=& e^{-t}(a + (b+c)t + \frac{1}{2}(c+1)t^2 + \frac{1}{6}t^3) \\ y &=& e^{-t}(b + ct + \frac{1}{2}t^2) \\ z &=& e^{-t}(c+t) \end{array} \right.$$

3. (a) $u = x/t, v = ty$ を t で微分して $\dot{u} = t^{-1}\dot{x} - t^{-2}x, \dot{v} = t\dot{y} + y$. 問題の方程式を代入して

$$\begin{array}{lcl} \dot{u} &=& t^{-1}((1+t^{-1})x - t^2 y) - t^{-2}x = t^{-1}x - ty = u - v \\ \dot{v} &=& t(t^{-2}x + (1-t^{-1})y) + y = t^{-1}x + ty = u + v \end{array}$$

よって

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{u} &=& u - v \\ \dot{v} &=& u + v \end{array} \right.$$

(b) 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $1 \pm i$ 対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}$. よって一般解

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= c_1 e^t (\cos t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + c_2 e^t (\cos t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \\ &= c_1 e^t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得, $x = tu, y = t^{-1} v$ より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} -t \sin t \\ t^{-1} \cos t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} t \cos t \\ t^{-1} \sin t \end{pmatrix}$$

4.

$$x = 1 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + c_4 t^4 + \cdots$$

とおいて方程式に代入する.

$$\begin{aligned} & c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + \cdots \\ & \quad = (1 - t^2)(1 + 2c_1 t + (c_1^2 + 2c_2) t^2 + (2c_1 c_2 + 2c_3) t^3 + \cdots) \\ & \qquad\qquad + 1 - t + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{6} t^3 + \cdots \\ & \quad = 2 + (2c_1 - 1) t + (c_1^2 + 2c_2 - \frac{1}{2}) t^2 + (2c_1 c_2 + 2c_3 - 2c_1 - \frac{1}{6}) t^3 \\ & \qquad + \cdots \end{aligned}$$

ここで、4次以上の項は必要ないので省略した. この式から,

$$c_1 = 2, 2c_2 = 2c_1 - 1, 3c_3 = c_1^2 + 2c_2 - \frac{1}{2}, 4c_4 = 2c_1 c_2 + 2c_3 - 2c_1 - \frac{1}{6}$$

を得て,

$$c_1 = 2, c_2 = 3/2, c_3 = 13/6, c_4 = 37/24$$

となり, 求めるべき級数解は

$$x = 1 + 2t + \frac{3}{2} t^2 + \frac{13}{6} t^3 + \frac{37}{24} t^4 + \cdots$$