力学系中間試験 解答例

いろいろな解き方があるので, 以下の方法にこだわることはない. 途中の計算は適宜略してある.

1. (1) まず, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ の固有値を求める.

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & -3 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ 1 & -2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = 0$$

を解いて固有値は $\lambda = 1, 2 \pm i$.

固有値 1 に属する固有ベクトルは $(A-E)\mathbf{u} = 0$ を解いて $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 固有値 $2 \pm i$ に属する固有ベクトルは $(A-(2\pm i)E)\mathbf{u} = 0$ を解いて $\begin{pmatrix} 4 \mp 3i \\ -3 \pm i \\ 5 \end{pmatrix}$.

したがって, 方程式の基本解は

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{2t} \left(\cos t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), e^{2t} \left(\sin t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

方程式の一般解は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \left(\cos t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ + c_3 e^{2t} \left(\sin t \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

(c_1, c_2, c_3 は任意の実数)

(2) 第 1 式には y が含まれていないので単独で解け, 一般解は

$$x = c_1 e^t - t - 1 \quad (c_1 \text{ は任意の実数})$$

である. これを第 2 式に代入して

$$\dot{y} = y + c_1 e^t - t - 1$$

を解けばよい．$y = c(t)e^t$ と置いて定数変化法を使うと

$$\dot{c} = c_1 - te^{-t} - e^{-t}$$

を積分して

$$c = c_1 t + te^{-t} + 2e^{-t} + c_2 \quad (c_2 \text{ は任意の実数})$$

となる．したがって一般解

$$y = c_1 te^t + t + 2 + c_2 e^t \quad (c_2 \text{ は任意の実数})$$

あわせて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t-1 \\ t+2 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の実数})$$

(3) 3 次方程式

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

を解くと

$$\lambda = 1(\text{重根}), -1$$

となるので同次形の一般解は

$$x = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 e^{-t} \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ は任意の実数})$$

である．特殊解を求めるために

$$x = (at^2 + bt)e^{-t}$$

とおいて方程式に代入する．$\dot{x} = ((2at+b) - (at^2+bt))e^{-t}, \ddot{x} = (2a - 2(2at+b) + (at^2+bt))e^{-t}, \dddot{x} = (-6a + 3(2at+b) - (at^2+bt))e^{-t}$ より

$$\begin{aligned}(-6a + 3(2at+b) - (at^2+bt)) - (2a - 2(2at+b) + (at^2+bt)) \\ - ((2at+b) - (at^2+bt)) + (at^2+bt) = t\end{aligned}$$

t の次数でまとめると

$$(8a-1)t - 8a + 4b = 0$$

したがって $a = 1/8, b = 1/4$ となり特殊解は

$$x = \left(\frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{4}t\right)e^{-t}$$

同次形の一般解とあわせて、求める一般解は

$$x = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 e^{-t} + \left(\frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{4}t\right)e^{-t} \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ は任意の実数})$$

である．

2. 係数行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は $0, 2$, 対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．よって同次形の一般解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の実数})$$

となる．特殊解を求めるため

$$x = at + b,\ y = ct + d$$

とおいて代入すると

$$a = (a+c)t + b + d + 1,\ c = (a+c)t + b + d$$

となるので，$a + c = 0, a = b + d + 1, c = b + d$ をみたすような a, b, c, d を求めればよい．$a = 1/2, c = b + d = -1/2$ となるので例えば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}t \end{pmatrix}$$

が特殊解である．よって一般解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}t \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の実数})$$

を得る．初期条件 $x(0) = y(0) = 0$ をみたす解を得るため，一般解に $t = 0$ を代入して

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより $c_1 = c_2 = 1/4$ となり求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{2t} + 2t - 1 \\ e^{2t} - 2t - 1 \end{pmatrix}$$

3. (1) $z = x - y$ を微分して

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{x} - \dot{y} \\ &= 2tx - 2ty \\ &= 2tz \end{aligned}$$

求める方程式は

$$\dot{z} = 2tz$$

であり解は

$$z = c_1 e^{t^2} \quad (c_1 \text{ は任意の実数})$$

(2) 上で求めた解より $x = c_1 e^{t^2} + y$. これを元の方程式の第 2 式に代入して

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -t(c_1 e^{t^2} + y) + 3ty \\ &= 2ty - c_1 t e^{t^2} \end{aligned}$$

これは y の微分方程式なので

$$y = c_2 e^{t^2} - \frac{1}{2} c_1 t^2 e^{t^2} \quad (c_2 \text{ は任意の実数})$$

と解が求まる. $x = c_1 e^{t^2} + y$ より

$$x = c_2 e^{t^2} - \frac{1}{2} c_1 t^2 e^{t^2} + c_1 e^{t^2}$$

なので求める解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 e^{t^2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} t^2 \\ -\frac{1}{2} t^2 \end{pmatrix} + c_2 e^{t^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \text{ は任意の実数})$$