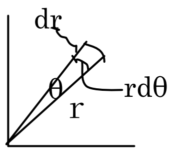
正規分布の式$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}s}e^{-\frac{(X-\overline{X})^2}{2s^2}}$が規格化されていることの証明

手順：ガウス積分の公式の証明⇒パラメータの変化により積分値が１になることの証明

１．ガウス積分$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$になることの証明

（１）ｘ－ｙ座標を極座標（ｒ－θ）に変換する方法

面全体の面積を　$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy$とあらわすと　①

極座標では 　ｒ・ｄθdr をθについて０～２π、ｒについて０～∞

で積分すれば面全体の面積をあらわす。即ち、$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} d\theta \cdot rdr$　②

①＝②であるから、$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dxdy = \int_{0}^{\infty} 2\pi rdr = 2\pi\int_{0}^{\infty} rdr$　となる。③

（２）今　I=$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$　とおくと、　I=$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy$　でもある。

これらの積を取ると、

I²=$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$　となる。　④

ｒ²＝ｘ²＋ｙ²　であるから、③より④は次のように書ける。

I²=$2\pi\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}rdr$　⑤

⑤でｒ^2＝R　とおき、　$\int_0^{\infty} e^{-R} dR$　⑥　を計算すると、⑥＝$\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot 2rdr$

となり、⑥は　$\left[-e^{-R}\right]_0^{\infty} = 0 + 1 = 1$　であるから

$\int_0^{\infty} e^{-r^2} \cdot 2rdr = 1$　となる。即ち、　$\int_0^{\infty} e^{-r^2} rdr = \frac{1}{2}$　　⑦

⑤と⑦から、I^2＝２π・1/2＝π　　即ち　I=　$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$　　⑧

２．⑧より、変数ｘを$\sqrt{a}x$　とすると、　$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$　　⑨

$x = X - \overline{X}$、　ａ$^{-1}$＝２ｓ^2　とおくと、

$$\int e^{-\frac{(X-\overline{X})^2}{2s^2}} dx = \sqrt{2\pi} \cdot s$$

これは即ち、　$\frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \int e^{-\frac{(X-\overline{X})^2}{2s^2}} dx = 1$　であるので、規格化されていることが証明された。