工学基礎実験（物理）の手引き　2.0 （2019 年版）v.2

～データの不確かさの統計学的解説～

吉田　敏

１．計測データには「不確かさ」が必ず存在する

物理実験、化学実験、生命科学実験などあらゆる科学的実験には、測定あるいは計測の作業が必要であり、重さや体積を測り、長さを測り、温度や時間などを測る。（数を数える、回数を数える、などは通常は測定とは呼ばず、計数と呼ばれる。）そして、計測は何らかの器具や装置を用いて行う。計測の結果は 2 つの部分に分かれる。数値と測定単位である。

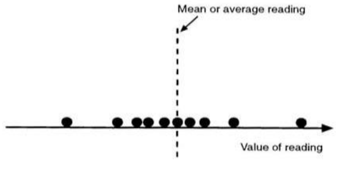
どのような計測についても、それがどれほど細心の注意のもとで行われたものであっても、常にある幅の疑わしさが残る。この疑わしさのことを計測の「不確かさ」と呼ぶ。以前は、これは「誤差（error)」と呼ばれていたが、**1993~95 年 GUM（Guide to Uncertainty of Measurement）という国際的な基準の指針（JCGM 勧告, ISO TAG4）によって「不確かさ（Uncertainty）」**とよばれるようになって、計測データの表記の仕方等を変更することが推奨された（日本でも 2004 年前後から）。元々、誤差というのは、「測定値－真の値」で表されていたが、「真の値」というのは不可知である。したがって、誤差という表記よりも、**不確かさ**　のほうが現実の測定にはふさわしいと考えられるので、「不確かさ(Uncertainty)」という言葉を、広く、物理計測分野、化学分析分野、臨床検査等の医学生命科学分野で、国際ルールとして使われることが推奨されている。*（若干言いづらいのは我慢しよう）*

２．計測の「不確かさ」の表し方

「不確かさ」を数量化するには、２つの数が必要になる。一つは「**区間**」という疑わしさの幅であり、もう一つは「**信頼水準**」である。例えば、「ある棒の長さが、信頼水準 95%で、20 センチメートルプラスまたはマイナス 1 センチメートルである」という場合、この計測結果は次のように書くことができる。

20 ± 1 [cm] （信頼水準 95%）

この表記は、棒の長さが 19 センチメートルから 21 センチメートルの間にあるということに対して 95%信頼がおけるということを表明している。この表記の最初の数値 20 は、**最確値**と呼ぶものであり、次の数値 1 が「**不確かさ**」の区間（幅）である。つまり、計測データは、[**最確値±不確かさ**]（**単位**）で表す。最確値は、最も確からしい推定値のことで、通常は算術**平均値**が使われる。



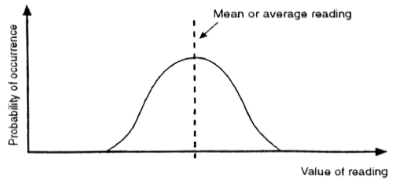


図１

３．計測データ（測定値）の表し方

（１）　平均値と標準偏差

一定の条件のもとで１つの物理量について、測定が**互いに独立に繰り返し** n 回行われたとする。その結果、直接 $x_1, x_2, x_3, ----, x_n$ という n 個の計測値を得たとする（**標本**）。これらの直接計測値の最確値は、それらの**算術平均値** $\bar{x}$ で表すことができる。（以下、$\overline{x}$ や $\bar{x}$ 等の overline は平均値を意味する）

$\bar{x} = (\Sigma x_i)/n$　　・・**平均値（Mean, Average）**―――① また以下のようにも表記。

$$\bar{x} = (1/n)\sum x_i$$

この場合、計測値 x_i には、**不確かさ** $\boldsymbol{u_i}$ が含まれるが、u_i はほぼ正負対称に表れる傾向にあるので、この総和 Σu_i は、n が十分大きいときは 0（ゼロ）になると考えることができる。測定値と平均値の差 $\delta_i = x_i - \bar{x}$ は統計学的には**残差(Residual)**とよばれて、その総和 $\Sigma \delta_i = 0$ になる。

計測値は平均値の周りに分布し、その分布の形はガウス分布（正規分布）に近くなることがあり（図１）、その場合統計学が適用できるが、当初の実験ではその分布は不明であることも多い。一般的には、**不確かさ** $\boldsymbol{u}$ を、**標準偏差** $\boldsymbol{s}$ を用いて表すのがよいとされる。標準偏差 s は次のように表す。（＊ s は**一つの測定値のばらつき**の程度を表している）

$\boldsymbol{s = \sqrt{(\Sigma (x_i - \bar{x})^2/n-1)}}$　・・**標準偏差（Standard Deviation, SD）**―――②

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

・・・**分散（Variance, *V*）**―――③

（標準偏差は次のように表示することもある）→ $s(q_k) = \sqrt{\dfrac{\sum_{j=1}^{n}(q_j - \bar{q})^2}{n-1}}$

標準偏差 s の２乗を分散(variance)という。この標準偏差は、**標本標準偏差、不偏標準偏差**、**実験標準偏差**（GUM で使用）と呼ばれることもある。これはまた、母標準偏差の推定値 SD_{n-1} とも呼ばれる。さらに、分散も**不偏分散**とよばれることもある。単に「不確かさ」といった場合、これはこの標準偏差のことである。次節の「標準不確かさ」とは意味が異なる。残差の絶対値の平均（$(1/n)\Sigma|x_i - \bar{x}|$）は、平均偏差と呼ばれるが、通常の統計的処理ではほとんど使われることはない。分散は測定データのばらつきを表すパラメータであるが、測定データとは単位が異なるため（2 乗になっているため）、ばらつきの大きさを報告する場合は分散ではなく、分散の平方根である標準偏差が用いられる（測定データと同じ単位になる）。

②、③式の場合、 n は測定回数で、**n-1 は自由度**として捉えることができる。平均値を計算して使う場合、独立した回数は n より１つ減った n − 1 となり、これが自由度である。ただし、 n で割る場合の分散もあるがこれは**母分散**と呼ばれるもので、理想的に大きな群（母集団）での分散を表し、実際の測定で使われる標本での分散とは意味が異なる。実際の測定で使う標本では自由度 n-1 を使って（不偏）標準偏差を求める。これはもし、1 回だけの測定値(n=1)を想定すると n で割った分散を使うと分母は 1、分子が 0 になるので、この分散はゼロになる（この意味は、ばらつきのない、一番精密な値！?）ことになり、不自然である。一方、n-1 で割った分散を使う場合は、 n ＝１の時、分母はゼロになり（分子も０）、分散の値は**不定という意味**をもつことになるので、矛盾はない。つまり、１つしか測定値がないので、データのばらつきは不明（不定）というべきなのである。

（２）**平均値の標準不確かさ**

もう一つの表し方が、**平均値の標準不確かさ**（以前は**標準誤差(Standard Error, SE)**や**平均値の標準偏差**ともいわれた）といわれるもので、$\boldsymbol{u}$ で表し、$\boldsymbol{u = s / \sqrt{n}}$ の関係にあるものである。つまり、**平均値の標準不確かさ**は、**標準偏差 s を測定数 n の平方根**で割ったもの（単に**標準不確かさ SU**、ともいう）である。

$u = \sqrt{\{\Sigma(x_i - \bar{x})^2/n(n-1)\}}$　　---(＊u は**平均値のばらつき**の程度を表している)

$\boldsymbol{u = s/\sqrt{n}}$　・・・**標準不確かさ（標準誤差(SE)、平均値の標準偏差）―――④**

と表記される。どのような場面で、SD と SU(SE)を使い分けるかは、後述（第 10 節）。

この u は、2017 年以前の指導書に記載の平均値 2 乗誤差と呼ばれていたものと同じものである。このように、**標準不確かさ**は標準偏差とは違うものであるが、上記の「**平均値の標準偏差**」と同じものになる。これは伝統的に標準誤差 SE と略されることも多いので、以下 **SE** を主に使う。

例えば、10 回の繰り返し測定を 1 セットとして計測を行い、1 セット目の測定で平均値 m_1 と分散 s_1^2 を得たとして、**5 セットの測定**を行う。各セット i で平均値 m_i と分散 s_i^2 を得た場合、この 5 セット全体の**平均値**（各平均値は正規分布に従うと考えられる；中心極限定理*）は、各セットでの平均値の平均値（$(1/5)\Sigma m_i$）になり、全体の**平均値の分散**（S_a^2）は各セットの分散の和（$S_t^2=\Sigma s_i^2$: 分散の加法性による；後述）を 5^2 で割った値（$(1/5^2)\Sigma s_i^2=(1/5^2)S_t^2$）になる。（＊**中心極限定理**：元の分布がどんな形であれ、そこから取り出した多数の標本の平均値の分布は正規分布に近いものになる）

5 セット分**全体の分散** $\boldsymbol{S_a^2=(1/5^2)\,S_t^2}$　（「5．分散の加法性」より）

この $\boldsymbol{S_a^2}$ の平方根が、**平均値の標準不確かさ(**$\boldsymbol{u}$**=)** $\boldsymbol{S_a=(1/5)\,S_t=(1/5)\sqrt{(\Sigma s_i^2)}}$ である。

すべての s_i^2 が同じときは（各回繰り返し測定データのばらつき具合は正規分布するので、ほぼ同じになることが多い；**等分散**の仮定）、$S_t^2=5\,s_i^2$ と考えてよいので、分散 $S_a^2=(1/5^2)\,5\,s_i^2$ となり、$\boldsymbol{S_a=s_i/\sqrt{5}}$ になって上記④式の「**標準不確かさ**」の形になる。セット数を n とし $s_i=s$ と置くと、$\boldsymbol{S_a=s/\sqrt{n}}$ になるので「**平均値の標準偏差**」（＝標準誤差 SE）の形が得られたことになる。

このように統計学的には**標準不確かさ**は n セットの測定によって得られるものであるが、これは当初の測定では各測定値のばらつきが正規分布かどうか不明であるためで、多数のセットの標本を得てはじめて正規分布が保証されるからである。ただし、1 セットだけの測定（この場合も測定数を n とする）であっても各測定値に等分散を仮定できる場合もあり、平均値のばらつきを表すために（平均値の標準偏差）**標準不確かさ**を 1 セットの測定だけで $\boldsymbol{s/\sqrt{n}}$ として求めることもある。（第 10 節参照）

（３）計測値の表記のしかた

以前の指導書では、計測値（測定値）は、最確値±確率誤差　（確率誤差＞器具精度のとき）で表されていた。そして、その確率誤差は、回数 n に依存した定数 $K(n)$ に平均 2 乗誤差 u を掛けたものを使って、$\pm K(n)\cdot u$ で表されていた。ただし、Kは、t 分布表から得られる値（t 分布の両側 50%で n-1 での t 値；n=10 のとき t=0.703）である。つまり、測定値 X は、$X = \bar{x} \pm K(n)\cdot u$ と表記された。（この場合統計的な標本標準偏差よりもより小さな値になるが、信頼水準も 50%と下がる）

しかし、**国際的なＧＵＭ指針に従った今回からの表記方法は、次のようになる。**

n 回（セット）計測して得られた計測値の「**標準不確かさ**」に、**信頼水準(Confidence Level, CL)**という考えをベースにした**包含係数（coverage factor） k** を掛けた値を「**拡張不確かさ**」**U** として、測定値 X は、

$$X = \bar{x} \pm U = \bar{x} \pm k \times u$$

と表す。ここで、包含係数 k は、信頼水準（CL）が 68%のとき k = 1 であり（正規分布の時、平均値 ±1σ（標準偏差）という意味）、**信頼水準が約 95%のとき k=2** であり（±2σ）、信頼水準が 99%のとき k=2.58 （±2.58σ）である。通常は、**95%の信頼水準(CL)で k=2 を、標準不確かさ *u* に掛けて使う**（**n に依存しない**）。（以前の指導書にあった K(n)定数を掛けるのは信頼水準が 50%という意味を持っていた。）即ち、

$$X = \bar{x} \pm 2u \quad (\text{CL } 95\% \ \textit{or}\ k=2) \qquad ―――⑤$$ ＊*最後の or は、どちらか表記の意。*

と表すことになる。括弧内のＣＬの記載は最後の結果（目的とする値）だけに付ければよい。この **2*u*** は従来の「確率誤差」の値よりも大きな数値になる。この **2*u*** も実験の中では便宜上「確率誤差」とよばれることもある。100%から信頼水準%を引いた値は**有意水準あるいは危険率**といわれる（この例では 5%の有意水準と使う）。(CL 95%)という表記は単に**(k=2)**と表すこともある。

多数のセットの測定結果、$\bar{x}_1 \pm s_1, \bar{x}_2 \pm s_2, \cdot\cdot\ \bar{x}_i \pm s_i, \cdot\cdot$ という**最確値と標準偏差（不確かさ）の集合**が得られた場合、n’セット全体の平均値は、**各平均値の平均値**になり($\bar{X}$)、また**全体の平均値の拡張不確かさ U** は、全体の**平均値の標準不確かさ（1/n’）**$\sqrt{\Sigma\{(s_i)^2\}}$ に 2 を掛けたものになり、その前に±を付ける。（後述の「不確かさの合成」の項を参照）

$$X = \bar{X} \pm (2/n')\sqrt{\Sigma\{(s_i)^2\}} \quad (\text{CL } 95\% \ \textit{or}\ k=2) \qquad ―――⑥$$

このように、繰り返し計測により統計的に得られた数値を用いて計測データを評価することを、**A タイプの評価**（Type A evaluation）という。

工学基礎実験における**最終的な標準不確かさ（拡張不確かさも）の数値の有効桁数は、1 桁とする**。したがって以下に述べる「不確かさの合成」が必要になる場合は、不確かさの有効桁数は計算途中では２～３桁まで求めておく必要があり、最終段階で 1 桁にする。この不確かさの有効数字に合わせて（揃えて）、最確値の有効数字（有効桁数）を決める。

このＡタイプの評価以外の方法で、不確かさを評価する必要がある場合は、これを**B タイプの評価**という。例えば、製造器具の校正書に記載の情報などであるが、これは以前の指導書にあった**器具精度**の評価に対応するものと考えることができる（データの分布として正規分布ではなく、矩形分布（一様分布）などを想定）。器具精度は、例として、目視で最小目盛り 1mm の 1/10 まで読み取ることができる計器の場合は、最小目盛りの 2~5 / 10 (*ex.*, 4/10; 0.4mm)とする値になる。もし、測定器具の器具精度が 0.05 [mm] で、上記の不確かさ（標準偏差） **s** が 0.008 [mm]になった場合は、**数値の大きい方を「標準不確かさ」**として採用し、最終表記としては $\bar{x} \pm 0.05$ [mm] とする。B タイプの評価では、見積もられた最大誤差の半分を a とすると、最大誤差の範囲内のどこでも同じ確率で計測値が出てくる可能性がある場合は（矩形分布）、±a/$\sqrt{3}$ を不確かさとして表記する。（今回の実験ではこの B タイプ評価はあまり使わず、従来の精度選定を行う）

４．**標準不確かさの合成**

間接測定のように、複数の計測値を組み合わせて（加減乗除によって）結果を得るような場合（例、密度の測定）、その結果の標準不確かさは、各計測値の標準不確かさ（例、u_a, u_b, u_c, ----）の**2乗和の平方根**で表し、これを**合成標準不確かさ**という。

例として、**各計測値の加減**によって結果を得る場合、u_a, u_b, u_c, --- を各計測値の標準不確かさとすると、

合成標準不確かさ $U_c = \sqrt{}(u_a^2 + u_b^2 + u_c^2 + ---)$

＊U_c の c は combined uncertainty の頭文字である

と表せる。

今年度以降は、ｎセット分全体の測定の平均値は**$(x_1+x_2+--+x_n)/n$** で表し（x_iは各セットの平均値）、その全体の不確かさは **$(1/n)\sqrt{}(s_1^2+s_2^2+--+s_n^2)$** と表すことにして、全体としては、

$[(x_1+x_2+--+x_n)/n] \pm (1/n)\sqrt{}\{\Sigma(s_i^2)\}$ ———⑦

と表す。2セットの時も、同様である。この2項目が**標準不確かさ *u*** に相当する。

実際には、⑦式の2項目に2を掛けて**拡張不確かさの数値として記載する**（**$\pm(2/n)\sqrt{}\{\Sigma(s_i^2)\}$ (CL 95%)**）（⑥式に同じ）。このように**標準偏差 s を合成すると標準不確かさになる**のである。

以前の指導書には、例として、3セットの平均値を用いてさらに標準誤差（さらには確率誤差）を計算して（n=3として）その値と、3セット分の<u>各誤差の絶対値の算術平均値</u>（$(|\Delta x_1|+|\Delta x_2|+|\Delta x_3|)/3$）と比較して、大きい方を3セット全体の誤差として表記するようにしていたが（ME処理）、**⑦式で表す場合は、基本的にはこの比較操作は必要ない**。通常、**５～１０セット程度以上の比較的多数の繰り返し測定**を行って⑦式の結果を求める。

また、結果を**各計測値の乗除**によって間接測定で得る場合は（$Y=A^aB^b/C^c$ など）、**相対的不確さ（不確さと平均値の比**：$u/\bar{x}$）を使って結果をあらわし、最終結果の相対的不確さは、**各計測値の相対的不確さの2乗和の平方根**としてあらわす（割り算があっても）。即ち、

$u(Y)/Y = \sqrt{}\{(u(A)/A)^2 + (u(B)/B)^2 + (u(C)/C)^2\}$ など、

と表せる。なお、この**不確かさと平均値の比**は、計測で使われる「標準偏差と平均値の比」（％表示）、つまり**変動係数（Coefficient of Variation, CV値）**に対応する。

関数 f を使って表すと（$y=f(x_1, x_2,--, x_i, --x_N)$）、**合成不確かさ** $u_c(y)$は一般的には、

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i)$$

と偏微分を使った**分散の和**の形に表せて、**不確かさの伝播測**と呼ばれる。ここで、$u_c(y)$を **$u_c(y)/y$** に、$u(x_i)$を **$u(x_i)/x_i$** に変換して相対的に表すこともできる。これは以前の指導書記載の「**誤差伝播の法則**」と基本的には同じである。ただし、以前の指導書では乗除の形の関係式を対数変換し偏微分をおこなって（$\ln y$ →偏微分→ $\Delta y/y$, $\Delta y=u(y)$）、

$\pm u(y)/y = \pm\sqrt{}((u(x_1)/x_1)^2+(u(x_2)/x_2)^2 + (u(x_3)/x_3)^2 + ---)$

と表した。

＝＝＝＝＝（以下もう一つの解説）

$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ が、次式のような指数関数

$Y = cX_1^{p_1} X_2^{p_2} \cdots X_N^{p_N}$

であった場合には、合成標準不確かさ $u_c(y)$ を上述の「不確かさの伝搬則」の公式をそのまま使って計算するよりも、この関数の対数をとり

$$\log Y = \log c + p_1 \log X_1 + p_2 \log X_2 + \ldots + p_N \log X_N$$

を微分して計算した方が簡単である。すなわち

$$\left(\frac{u_c(y)}{y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\left[p_i\left(\frac{u(x_i)}{x_i}\right)\right]^2$$

の式から合成標準不確かさ $u_c(y)$ を算出することができる。合成分散 $u_c^2(y)$ は「相対合成分散」$(u_c(y)/y)^2$ として、各入力値の推定分散 $u^2(x_i)$ は「相対推定分散」$(u(x_i)/x_i)^2$ として表せる。また、「相対合成標準不確かさ」は $u_c(y)/|y|$ であり、各入力推定値の「相対標準不確かさ」は $u(x_i)/|x_i|$ である。

＝＝＝＝＝

5．正規分布データについての分散の加法性

ある複数の標本の各平均値が独立であるとき、加法性が成り立ち、下式となる。（3 個以上でも同様）

Y＝X１＋X２

分散にも同様に加法性が成り立ち、下式となる。

$\boldsymbol{\sigma_Y^2 = \sigma_{X1}^2 + \sigma_{X2}^2}$

この式の**左辺 σ_Y^2 の平方根が Y の標準偏差 $\sigma_Y = \sqrt{(\sigma_{X1}^2 + \sigma_{X2}^2)}$ に対応する。**

しかし、標準偏差や標準誤差には加法性が成り立たないことは注意が必要である。

$\sigma_Y \neq \sigma_{X1} + \sigma_{X2}$

従って、指導書にあった「確率誤差」も標準偏差に定数係数が掛かった値であるので、本来加法性はない。

この**分散の加法性**は、統計学的にみると、確率変数 $X+Y$ は、期待値（平均値）が $\mu_1+\mu_2$、分散が $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ の正規分布に従う、ということを意味し、以下のような形（確率密度関数）で導ける。（分母に**分散の和**の形で入っている）

$$\begin{aligned} & P_{X+Y}(z) \\ & = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\exp\left[-\frac{\{z-(\mu_1+\mu_2)\}^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right]\sqrt{\frac{2\pi\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\exp\left[-\frac{\{z-(\mu_1+\mu_2)\}^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right] \end{aligned}$$

分散の計算には次のような関係が知られている。

X についての分散を求める操作を、***V*[X]** と書く（V はイタリックで書き、Variance の頭文字の V）。X と Y についての共分散*（Covariance；下記参照）を *Cov*[X, Y] と書く。また、X と Y が**独立した期待値**であるとすると共分散はゼロになる。すると、

１．*V*[X±Y] = *V*[X] + *V*[Y]　＊実は右辺は *V*[X]+*V*[Y]+2*Cov*[X,Y]だが、*Cov*[X, Y]=0 であるため

２．*V*[a ± X] = *V*[x]

3． ***V*[aX] = a²*V*[X]**　　　＊（a は定数；括弧の外に出すときは 2 乗になる）

4． **平均値の分散**：各 X_i の標準偏差を $\sigma_i(=s_i)$で表す

$$V[\overline{X}] = V\left[\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right]$$
$$= \frac{\sigma^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n^2} + \cdots$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

（＊ここで各 X_i の分散は同じであると考えている）この平方根をとれば平均値の標準偏差の関係になる。第 4 節の式⑦に関連して、$V(\overline{X})=(1/n^2)\Sigma\sigma_i^2$ より、この左右の式の平方根をとり**平均値の標準偏差**は**(1/n)√(Σ σ_i^2)**となる（式⑦）。この関係より、**平均値の標準偏差**（標準誤差 SE）を求める前提として各測定値の分散がほぼ等しく正規分布に近いことがあるのに注意。**平均値の分散は、各標準不確かさの 2 乗和の平均値（(1/n) Σ (σ_i/√n)²）**になっている。

*なお、 x と y の**共分散**とは、$S_{xy}=(1/n)\Sigma\{(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\}$ のことを意味する。

$\overline{x}$ と $\overline{y}$は、平均値を表す。この x, y が完全に独立している変数の時は、共分散 S_{xy} は 0 になる。

また、２つの標本数の異なる標本（n_x, n_y）の**共通の分散**という考え方がある。各標本の分散を s_x^2, s_y^2 とすると、等分散の仮定の下でのそれぞれの分散の**共通の分散**を計算するとき、次の式で与えられる。

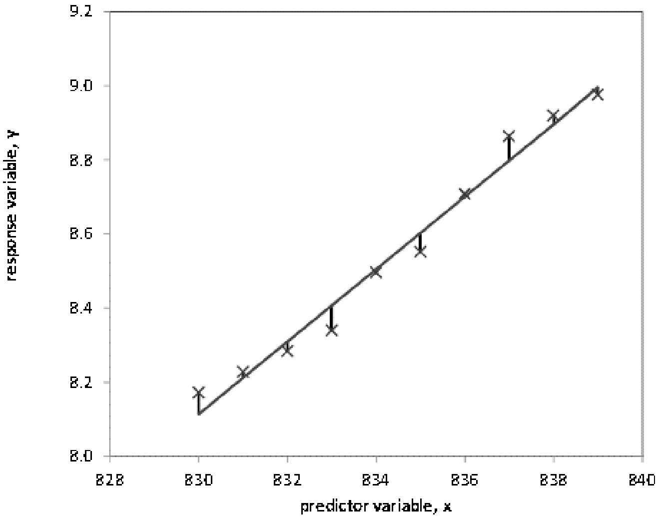
共通の分散 s^2 $=\{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2\}/(n_x+n_y-2)$　　＊もし $n_x=n_y=n$ であれば、$s^2=(s_x^2+s_y^2)/2$ である。

比較の意味で、X についての**期待値（平均値）を求める操作を *E* [X]**と書く時の関係式（公式）を以下に載せる（**期待値の加法性**）。$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i$（ここで p_i は確率；p_i =1/n で平均値になる）

1. *E* [X+Y]=*E* [X]+*E* [Y]
2. *E* [X+a]=*E* [X]+a
3. ***E* [aX]=a*E* [X]**
4. X と Y が独立なら，*E* [XY]=*E* [X]*E* [Y]

６．最小二乗法による回帰直線の求め方と不確かさ

データ（x, y）を 2 次元上にプロットして、近似直線としての回帰直線を求めるとき、最小二乗法を使う。**回帰直線**を、**$y = ax + b$** で表すことができるとすると、**a は傾き（slope）**であり、**b は切片（intercept）**になる。この時、$y_i = ax_i + b + \delta_i$ と表すことができて、δ_i は**残差**に対応する。この場合、y の分散は δ_i の分散に等しい。また、x_i にはばらつきは考えず、y_i だけにばらつきがあると考える。（図 2）



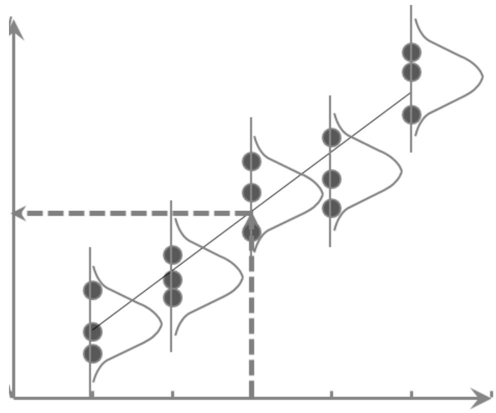


図 2

この回帰直線の傾き a と切片 b を決定しようとするときは、**残差 δ_i の 2 乗和が最小（極小）**になるように偏微分方程式（2 乗和の偏微分（($\Sigma\{y_i - (ax_i + b)\}^2$ を a と b について偏微分)が 0 になる；正規方程式ともよばれる）を解いて、a, b を求める。このやり方を（線形）最小二乗法という。（テキストによっては回帰直線を y=a + bx や、y=mx + b などで表したりすることがあるので、記号の扱いには注意が必要）

正規方程式は次の形になる。

$$\partial / \partial a = 2a\Sigma x_i^2 + 2b\Sigma x_i - 2\Sigma x_i y_i = 0$$

$$\partial / \partial b = 2a\Sigma x_i + 2b\Sigma 1 - 2\Sigma y_i = 0$$

回帰直線 **$y = ax + b$** で、求めた **a** (*傾き*)と **b** (*切片*)は次のように表せる。

Slope **a** $= \dfrac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2} = SS_{xy}/SS_{xx}$

a $= \dfrac{\overline{\boldsymbol{xy}} - \overline{\boldsymbol{x}}\cdot\overline{\boldsymbol{y}}}{\overline{\boldsymbol{x^2}} - (\overline{\boldsymbol{x}})^2}$ とも表せる（上記式右辺の分母と分子を n^2 で割れば出てくる）。この式の分母は、

$SS_{xx}(=\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2)$を変形したものである。この分子は、

$SS_{xy}(=\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))$を変形したものである。（overline は平均値を意味）

Intercept **b** $= \bar{y} - \boldsymbol{a}\bar{x} = \dfrac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\sum x_i{}^2 - (\sum x_i)^2}$

b $= \dfrac{\overline{\boldsymbol{y}}\cdot\overline{\boldsymbol{x^2}} - \overline{\boldsymbol{x}}\cdot\overline{\boldsymbol{xy}}}{\overline{\boldsymbol{x^2}} - (\overline{\boldsymbol{x}})^2}$ とも表せる。

また、 y の分散 $\mathbf{S_x}^{2}$ は、残差 δ_i （$=y_i - \hat{y}$）の分散と等しい（またどの y_i についての分散も互いに等しいと考えている；**等分散**：また、x_i にはばらつきは無いものとする）。ここで $\hat{y}$ （y ハット）は回帰直線上の y 値である。次のように表せる。

(A) $$S_y^2=\left(\frac{1}{n-2}\right)\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$$

これはまた、

$\mathbf{s_y^2 = (1/(n-2))\,\Sigma\,(y_i - (ax_i + b))^2}$

として表せる。この式の **n－2 は自由度**である（回帰直線が決定されれば直線は 2 点で決まるので自由度は n から 2 だけ減少することを意味する）。この回帰直線は、（$\bar{x}, \bar{y}$）の点を必ず通る。

回帰直線の係数 **a と b の標準偏差を、σ_a, σ_b** とする。

まず、***slope*** **a** の分散を計算した結果は、

$\boldsymbol{\sigma_a^2 = V[a] = S_y^2/SS_{xx} = S_y^2/\Sigma\{(x_i - \bar{x})^2\}}$

と表せる。次にこの証明を行う。

$a = SS_{xy}/SS_{xx} = \Sigma\{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\}/\Sigma(x_i - \bar{x})^2$

であるから、分散を求めると（$\sigma_a^2 = V[a]$；x_i, $\bar{x}$ にはばらつきは無く、$\Sigma(x_i - \bar{x})^2$ は定数と見做す）

$V[a] = V[\Sigma\{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\}/\Sigma(x_i - \bar{x})^2]$

$= 1/\{\Sigma(x_i - \bar{x})^2\}^2\,(V[\Sigma y_i(x_i - \bar{x})] + V[\bar{y}\,\Sigma(x_i - \bar{x})])$

＊上右式 2 項目の分散は、$\Sigma(x_i - \bar{x})$ が 0 なので、ゼロになる

$= 1/\{\Sigma(x_i - \bar{x})^2\}^2.\ \Sigma(x_i - \bar{x})^2\,V[y_i] = \boldsymbol{\{1/\Sigma(x_i - \bar{x})^2\}.S_y^2 = S_y^2/\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$

従って、

(B) $\boldsymbol{\sigma_a^2 = S_y^2/\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$

つまり、a の分散は、全体の残差の分散 $\mathbf{S_y^2}$ を x_i の残差の 2 乗和 で割ったもの、となる。

また、***Intercept*** **b** について、同様に分散の計算をおこなう。

$b = \bar{y} - a\bar{x}$ より、

$\sigma_b^2 = V[b]$

であるので、$V[b] = V[\bar{y} - a\bar{x}] = V[\bar{y}] + V[a\bar{x}]$

$= V[((\Sigma y_i)/n] + (\bar{x})^2\,V[a]$

$= (1/n)^2 V[\Sigma y_i] + (\bar{x})^2\,S_y^2/\Sigma(x_i - \bar{x})^2$

$= (1/n)^2 \cdot nS_y^2 + (\bar{x})^2\,S_y^2/\Sigma(x_i - \bar{x})^2$ ＊y_i については等分散を仮定

$\boldsymbol{= (1/n)\,S_y^2 + (\bar{x})^2\,S_y^2/\Sigma(x_i - \bar{x})^2}$

(C) $\boldsymbol{\sigma_b^2 = S_y^2\,(1/n + (\bar{x})^2/\Sigma(x_i - \bar{x})^2)}$

上記の（A）、（B)、（C）の式が、回帰直線に関係する分散の値であるので、平方根をとって各標準偏差 $\mathbf{S_y}$、σ_a、σ_b も求まる。

これらの標準偏差 σ_a や σ_b は、関数電卓を使って計算することも可能であるが、表計算ソフト Excel にある統計関数 **LINEST** を使って簡便に得ることができる。ただし、この LINEST 関数で返されるその値は a, b に対する**標準誤差（σ/√n）**であり、**標準偏差に変換するには LINEST で得られた各標準誤差に√n を掛けて求める。**

回帰直線全体での不確かさの表し方は、以下のように**標準偏差**を用いて行う。拡張不確かさを使う必要は無い。

$$y = (a \pm \sigma_a)x + (b \pm \sigma_b)$$

以前の指導書では、**a, b** の「誤差」として、規格化した（$\Sigma x_i y_i$ を 1 とし Σy_i を 0 とする、など）正規方程式を使って重み係数 w_a, w_b というものを計算し、全体の確率誤差を E としたときに、それぞれ E$\sqrt{}(w_a)$, E$\sqrt{}(w_b)$ と表したが、このように定義しただけで、この重み係数自体には標準偏差など統計的意味を持つものとの直接的な関連性はないと思われる。

なお、上記の x と y の関係の強さを表す**相関係数**は、以下の式で表される。

相関係数 r（別名：ピアソンの積率相関係数）は、−1 ≤ r ≤ 1 の範囲にある。

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right)\right)^{1/2}}$$

<u>その他の最小二乗法</u>

ここでは、線形最小二乗法について述べたが、**重み付き最小二乗法**（y_i に等分散を仮定しない）や、**非線形最小二乗法**（直線ではない多項式等$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$で近似する、など）というデータ処理法もある。一例として、2 次式（**$y=ax^2+bx+c$**）で近似する場合を以下に示す。この場合、式を詳細に書くと複雑になるので行列を使ってあらわす。

その前にまず、上記で述べた一次式（**y=ax+b**）の時の連立方程式を、行列を用いて解く場合は次の形になる。偏微分の形は以下のように表現できて（$\Sigma\{y_i - (ax_i + b)\}^2$ を a と b について偏微分）、

$\partial / \partial a = \mathbf{2a\Sigma x_i^2 + 2b\Sigma x_i - 2\Sigma x_i y_i = 0}$

$\partial / \partial b = \mathbf{2a\Sigma x_i + 2b\Sigma 1 - 2\Sigma y_i = 0}$

この連立方程式（正規方程式）を行列で表現すると、

$$\begin{pmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i \end{pmatrix}$$ ----上記の行列表現

$$\begin{pmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i \end{pmatrix}$$ ---上記両辺に逆行列 X^{-1} を掛ける

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i \end{pmatrix}$$ **----(a, b)の解の行列表現**

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\Sigma x_i^2 \Sigma 1 - \Sigma x_i \Sigma x_i}\begin{pmatrix} \Sigma 1 & -\Sigma x_i \\ -\Sigma x_i & \Sigma x_i^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i \end{pmatrix}$$ ---以下の公式より**計算**

公式：$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の逆行列は，　$\Delta=ad-bc\neq 0$ のとき $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

によって、行列を計算して **a, b** を求める。結果は第 5 節で述べた *slope* **a** と *intercept* **b** の式（p.9）になる。

2 次式（**y=ax²+bx+c**）の場合も、行列の形は同様で以下のように規則的な形（右辺べき指数の並びを見よ）になる。3 行 3 列以上は表計算ソフト Excel 等を使って逆行列を解いた方がよい。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i & \Sigma 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \Sigma x_i^2 y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i \end{pmatrix}$$

3 次式以上の場合も同様な規則的な形の行列になる。

７．**データの正確さと精密さ**

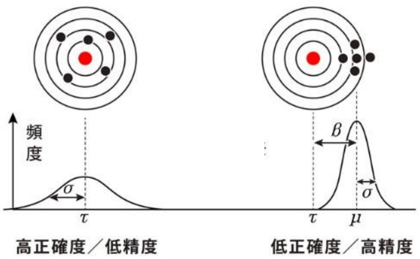


図 4

データの**不確かさが小さい**とき、**精密(Precision)**であるという。

データの**平均値が「真の値」に近い**ほど、**正確(Trueness)**であるという。「真の値」は、実際には色んな人々がより良い条件、環境の下で繰り返し測定して得た測定値の「平均値」あるいは「最確値」のことと考えてよい。

正確であっても、精密ではない場合もある。（標準偏差が大きい）

正確でなくても、精密である場合もある。（平均値が「真の値＝最確推定値」からずれていても、標準偏差は小さい；このような場合、重大な**系統的な偏り、ヒューマンエラー**が影響していることがある）上の図 4 が視覚的にそれを示している。正確さと精密さが共に高いとき、**精度(Accuracy)が高い**ともいわれる。目指すは精度の高い実験である。

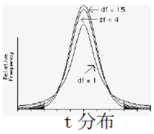
８．**平均値の差の分布は *t* 分布**

小さな標本の平均値と母平均値との差は、Student's *t*-distribution（ *t* 分布）と呼ばれる確率分布に従う

$$\boxed{\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}}}$$

ことが証明されている。左式は *t* 値といい、平均値の差（母平均値との差）を標準誤差（s/√n）で割った値で、これが *t* 分布に従う。この *t* 分布の式は、下のように複雑なもの（枠内）であるが、1908 年に Student というペンネームで W.S.Gosset によって発表され、後に現代統計学の確

$$\lim_{n\to\infty}\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}B(\frac{n}{2},\frac{1}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$


t 分布

立者である R. Fisher によって使われた。この式の分母の B はベータ関数である。 n が大きくなると、正規分布に近づく。化学生命系の実験では実験データ数が 5～30 以下程度の**小さい標本**で比較することが多いので、この *t* 分布は有用である。右表は *t* 分布表の一部であり（補追の D にも拡大版を載せてある；P.18）、表の n 値は自由度、α は有意水準を表し通常は α が 0.05（5%）のときを調べる。以前の指導書にあった K(n)という係数は α が 0.5（50%）のときの n-1 での値（例えばデータ数 n=10 の時は自由度 n-1 は 9）のところを見て 0.7027 の値を見つけることができる。α が 50%ということは信頼水準が 50%という（五分五分）意味であるので、拡張不確かさのときの信頼水準 95%よりも信頼度は低いということになる。

t分布表

α /2 α n	0.25 0.5	0.2 0.4	0.15 0.3	0.1 0.2	0.05 0.1	0.025 0.05
1	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062
2	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027
3	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824
4	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764
5	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706
6	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469
7	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646
8	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060
9	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622
10	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281

この *t* 分布は特に、２つの群の**平均値に差があるかどうかの検定（ *t* 検定）**に使われることが多い。

９．**測定器具の精度と「誤差」の扱い**

精度選定のやり方は、新しい **B タイプの評価**ではなく、従来の「誤差」を扱うやり方で行うこととする。ここで使う「誤差」は**不確かさ**に対応するが、数式的扱いは従来の指導書に従う。予備実験の“密度測定”を例に、精度選定と誤差の扱いの説明を採用する。

ある円柱状の物体の質量 M と、直径 D、高さ L から体積 $\pi(D/2)^2\cdot L$ を求め、質量を体積で割って密度 ρ を求める。

（１） 概略値の測定

直接測定量の大まかな測定（有効数字 2 桁程度、1 回測定）

（例）M= 1.0 X 10^2 [g],　D= 50 [mm], L= 20 [mm]

（２）精度選定のための誤差の式

密度は、 $\rho = M/\{\pi(D/2)^2\cdot L\}$

両辺の自然対数をとり、

$$ln\ \rho = ln\,M - ln(\pi/4) - 2ln\,D - ln\,L$$

両辺の微分をとり（dρ などを Δρ などと表す）

$$\Delta\rho/\rho = \Delta M/M - \Delta\pi/\pi - 2\Delta D/D - \Delta L/L$$

誤差は**最大誤差の推定**として絶対値をとり、

$$|\Delta\rho/\rho| \leqq |\Delta M/M| + |\Delta\pi/\pi| + 2|\Delta D/D| + |\Delta L/L|$$

和の形で表す。（この場合は 2 乗しなくてよい）

ρ を相対誤差 1%以内で求めることを考える。

π は円周率の定数であるから、それを除いた**他の項に 1%を等分配する。** π には小数点以下何桁まで出すか決める必要があるので、その分配％の 1/10 の値を使う。つまり、

$$|\Delta\rho/\rho| = |\Delta M/M| + |\Delta\pi/\pi| + 2|\Delta D/D| + |\Delta L/L|$$

1%　　0.3%　　0.03%　　0.3%　　0.3%

例えば、$\Delta M/M \leqq 0.003$

$\Delta M \leqq 0.003M = 0.003 \times 100 = 0.3$ [g]

これは、質量の測定の場合、精度 0.1 [g]の棹秤以上の精度を持つものを使う。

同様に、

$\Delta D \leqq 0.0015D = 0.075 \fallingdotseq 0.08$ これは、ノギス以上のもの（0.05mm）を使う。

$\Delta L \leqq 0.003L = 0.06$ [mm] これも、ノギス以上のものを使う。

$\Delta\pi \leqq 0.0003\pi = 0.0009$ (4 桁までとる意より 0.0001 とする場合あり） 即ち $\pi =$ 3.1416 を使う。これらが精度選定といわれる。なお、デジタル器具の場合、読み取り最小値の半分が読み取り誤差として扱われる（例：デジタル秤量計（電子天秤）で読み取り最小値が 0.01 [g]のとき、その器具精度（不確かさ）は 0.005 [g] とする：±0.005 [g]；ある製品（ザルトリウス製）校正書には±0.007 [g]とある）

（３）測定器具について、最大の相対誤差を計算する

例：　M:　棹秤 0.1 [g], D: ノギス 0.05 [mm], L: ノギス 0.05 [mm], を用いる場合、

$$|\Delta\rho/\rho| \leqq |\Delta M/M| + |\Delta\pi/\pi| + 2|\Delta D/D| + |\Delta L/L|$$

$$= 0.1/100 + 0.0009/3.1416 + 2 \times 0.05/50 + 0.05/20$$

$$= 0.0010 + 0.0003 + 0.0020 + 0.0025$$

$$= 0.0058 < 0.01\ (1\%)$$

となり、密度 ρ の相対誤差は１％以下になる。

実際、密度 ρ の計算式を使って密度を計算し、その最確値と誤差（不確かさ）を出す。

零点補正した後の平均値をそれぞれ M_0, D_0, L_0 とし、各確率誤差（**標準偏差**又は**器具精度**と比較して大きい方の誤差）を　$\varepsilon_M, \varepsilon_D, \varepsilon_L$ とすると、各測定値は以下のように表される。（M は 5 回、D と L は 10 回ずつ測定する。）

$$M = M_0 \pm \varepsilon_M$$

$$D = D_0 \pm \varepsilon_D$$

$$L = L_0 \pm \varepsilon_L$$

密度の最確値は、$\boldsymbol{\rho_0} = M_0/\{\pi(D_0/2)^2 \cdot L_0\}$ となり、

この間接測定結果の密度の誤差（不確かさ）は **2 乗相対誤差の和の平方根**で表し、

$\boldsymbol{\varepsilon_\rho} = \rho_0\sqrt{\{(\varepsilon_M/M_0)^2 + (\varepsilon_D/D_0)^2 + (\varepsilon_L/L_0)^2\}}$ となる。これが ρ の**平均値の標準不確かさ**になる。即ち、測定値は　$\boldsymbol{\rho = \rho_0 \pm \varepsilon_\rho}$ と表せる。（誤差の足し算にはならない：$\varepsilon_\rho \neq \varepsilon_M + \varepsilon_D + \varepsilon_L$）最終的には、拡張標準不確かさを使って、$\boldsymbol{\rho = \rho_0 \pm 2\varepsilon_\rho}$ **(CL 95%)** と表す。

１０．測定回数の設定の仕方

物理実験に限らず、化学生命系の実験でも様々な測定作業を行い、繰り返しデータをとり、その平均値を計算し、不確かさを数値として出す作業が必要となる。その際、どれくらいの回数の繰り返し測定が必要になるのか、という実験計画を立てる必要がある。これまで述べてきたように、不確かさをできるだけ小さくできるように測定回数を増やす必要があるが、当然１～２回では統計的処理をやる意味がない。通常、1 セット目の測定回数としては少なくとも 5 ～１０回が求められる。その上で、1 セット目の最確値（平均値 m_1）と標準偏差 s_1 が求まる。ただ、どれくらい繰り返しのセット数を増やすかは一概には決められておらず、測定者に任されるが、測定の内容や性質によってもかなり影響される。

例として、化学生命系でよく使われるマイクロピペット（例：ギルソン社 Pipetman 等）による溶液の分取操作で、純水の体積の計測を考える。計測中の純水は密度の変化もほとんど無く極めて均質な液体と考えられるので、分取した純水の重さを化学精密天秤で、μｇレベルで湿度にも配慮して慎重に測れば体積が正確に分かる。一例として、10μL 用のマイクロピペットを使って、10μL を分取し天秤に載せて重さを測り（測定中の純水の蒸散は無視できるものとする）、体積を算出する。次の表になったとする。

表 10-1（田中秀幸著：分析測定データの統計処理（朝倉書店、2014）　より引用）

番号	1	2	3	4	5
結果（μL）	9.985	10.005	9.985	10.004	10.017
番号	6	7	8	9	10
結果（μL）	9.999	9.988	10.014	10.014	10.012

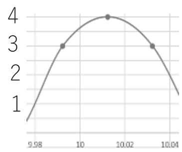
体積の平均値　　$\bar{v}$ =10.0023　μL

標本分散　　$s^2(v)$=0.0001565　（μL）^{2}

標本標準偏差 SD　　$s(v)$=0.01251　μL

平均値の標本標準偏差　$s(\bar{v})=s(v)/\sqrt{n}$ =0.01251/$\sqrt{10}$ =0.003955　μL　（標準誤差　**SE**）

これらは、校正済みのピペットを使って、単純で再現性の高い操作によって得られたデータである。公称値は 10μL（公称ランダム誤差 1％以内）であるので、0.0023　μL だけ公称値よりも大きな平均値になっていると言えるが、**平均値の標本標準偏差** 0.0040　よりも小さいので明らかな偏りはないと言える。これらは 1 セットの測定で得られたデータであるが、さらにセット数を増やして 5 セットあるいは 10 セットの測定をする必要があるだろうか？ここで**平均値の標本標準偏差**の数値も示したが、本来このデータは 5 セット以上の繰り返し測定で平均値を 5 個以上出して求まるデータのはずだが、この 1 セットのデータで標準偏差は**平均値の 0.1%程度（CV 値）になっているので十分精密である**と考えられる。したがって、セット数を増やす必要はないと考えられる。（セット数を増やしてもよいがあまり改善は期待できない）このような測定では、計測した純水の体積のばらつきは、あまり偏りはなくランダムで**正規分布に近く**なっていると考えられることと（右分布概略図：ヒストグラム, Frequency）、**精密**であることが特徴である。このような場合「**最確値±不確かさ**」での「不確かさ」として、1 セットの測定であっても**標準不確かさ（平均値の標準偏差、標準誤差 SE）**を使うことができる。つまり、上記の体積の計測データのように精密である場合は、10.00±0.01　μL と SD を使って表すよりも、10.002±0.004　μL と SE を使って表す方がその精密性を示すことができる場合があるので好ましい。



このような十分に精密な測定の特徴として、直接測定で、純水のように均質でほとんど変化せず粘性が小さく扱いやすいものを半自動で、環境変化もほとんど無く、慣れた人であればほとんど操作ミスが起こりにくい単純な測定であるということがある。しかし、ピペット操作の場合、粘性の比較的高い溶液試料やコロイド試料、生体（細胞）試料などでは理想的な測定にはなりにくい。また、物理実験でも力学的に不均一・不均質な動作（例：往復平面運動が不均一楕円運動になる、微小なずれの発生、摩擦抵抗の影響、大きな突然の減衰、など）になったり、ヒューマンエラーによるデータの偏りが起こりやすい作業が多くなったりする場合も、ばらつきは正規分布に近くはなりにくい。このような精密ではない場合は、データのばらつき具合を示すことが重要なので、1 セットの測定では **SD (=s)を不確かさとして使うべき**で、**SE (=$s/\sqrt{n}$)**では過小評価になりやすい。どんな場合も平均値のばらつき具合を示すために[平均値

±**SE**]を使ってよろしい、と解説されている文献もあるが、この前提となる当初の測定値のばらつきが正規分布という仮定が成り立たない場合は、これは過小評価と批判されることもある。このような時は[最確値（平均値） ± **不確かさ**]として SD を用いて表示すべきである。一方、精密で再現性の高い測定というのは、分銅のような同じおもりの重さを精密天秤で繰り返し測る場合、同じノギス等で繰り返し長さを測る場合、均質で粘度の低い溶液を保証済みのピペッターで環境変化のない状況でピペッティングする場合、再現性の高い振り子の 50~100 周期分を慣れた人が 1/100 秒読むストップウォッチで計測する場合、などである。

あまり精密ではない測定の場合は、データのばらつきは偏りやすく**正規分布は仮定できないことが多い**ので、1 セット 5 ～10 回程度の測定だけでは十分とは言えない。故に、平均値のばらつき具合を知るために**標準不確かさ**を得る場合は、セット数を増やして繰り返し多くの平均値を求めて（この操作で正規分布に近づく）、そこから**平均値の標準偏差（標準不確かさ）*u***を求める必要がある。この場合は、 5 セット以上繰り返し測定をした方が効果はある（ただ 15 セット以上やっても効果は次第に鈍化する：標準偏差の変動係数の測定回数依存性をみると、3 回で 52%、5 回で 36%、10 回で 24%、15 回で 19%、20 回で 16%、30 回で 13%、になる（文献３））。実際は測定に使う時間も限られているので、1 セット 10 回程度の測定を行いあまり精密ではなかった場合は、さらに 5 セット以上測定を増やして**標準不確かさ**を求めた方が良い。

１１．物理実験例とレポート作成上の注意

(例：ボルダの振り子による重力加速度の測定について)*以下にデータの一例と書き方のヒントだけを述べる。*

目的：重力加速度 *g* の値をボルダの振り子によって求める。 *（何を求めるのか明瞭に書く）*

原理：振り子が振れ角 θ [rad]の単振動として近似できるとき、$d^2\theta/dt^2 + \omega^2(d\theta/dt) = 0$ （ここで ω は角振動数； $\theta \cong \sin\theta$ のように振れ角が小さいとき；概ね 5 度以内）の単振動の関係式を用いて、$\omega = 2\pi/T$ （ここで T は周期[s]）から、$\omega^2 = Mgh/I$ （ここで *M* は金属球の質量、 *g* は重力加速度、 *h* は振り子の長さ、*I* は慣性モーメント；$I\,d^2\theta/dt^2 = -Mgh \cdot \sin\theta$ {[慣性モーメント]X[角加速度]＝[掛かる力]）より} より、$2\pi/T = \sqrt{(Mgh/I)}$, 従って、 $T = 2\pi\sqrt{(I/Mgh)}$ を得る。ここから、$g = 4\pi^2/T^2 \cdot I/Mh$ となる。慣性モーメント *I* は、球の半径を r 、針金の長さをl（結合部とエッジ間長さを含む）として、$I = M(l+r)^2 + (2/5)Mr^2$ と球体の慣性モーメント（2 項目）も考慮して得られる。これを代入して、 $g = (4\pi^2/T^2)\{(l+r) + (2/5)r^2/(l+r)\}$ と、 *g* は T と *l* と *r* の関数として表せる。

方法： この式から、周期 T（実際は 100 周期を 10 回測り平均をとり 1/100 を掛ける：1 セットの計測として：実はこの 1 回計測の中に 100 周期分の平均操作が入っている）、さらに 5 セット以上計測し全体の平均値と拡張不確かさを計算する。長さ*l*、 および *r* を計測し（別々の人が 5 回以上計測して**平均値と標準偏差**（あるいは器具精度；大きい方を不確かさとして採用）を求める（精度選定も行う）；足して *h* とする（*h=l + r*））、最確値と誤差（不確かさ）を求め、式から *g* を計算し誤差伝播の法則より *g* の誤差も計算する。最終的に *g* の誤差としては、拡張不確かさ U を計算して用いる。デジタルストップウォッチを用いて計時するときは、読み取り最小値は 0.01 [s]なので、読み取り誤差はその半分の 0.005 [s]になる。差を取った場合の誤差はそれらの誤差の 2 乗和の平方根（不確かさの合成）として 0.007 [s] とし、この値（器具精度に対応）と各セット 10 回分の残差から求めた標準偏差の値と比較し、大きい方を不確かさとして採用する。

時刻			時刻			100周期の時間	
振動回数	分	秒	振動回数	分	秒	分	秒
0	15	57.6	100	19	9.9	3	12.3
10	16	17.0	110	19	29.0	3	12.0
20	16	36.2	120	19	48.2	3	12.0
30	16	55.8	130	20	7.8	3	12.0

表 11-1. 以下略

結果：周期 T は 5 セット以上計測して、一つの値にまとめるが、各セットの誤差を（$\Delta 100T_i$）とすると、以前は $(1/n)\Sigma(\Delta 100T_i)$として誤差付き量の統計処理によって誤差の平均を取っていたが、今回からは **2 乗和の平方根**をとり、$(1/n)\sqrt{(\Sigma(\Delta 100T_i)^2}$ をまとめた不確かさとし、$100T = \overline{100T} \pm \frac{1}{n}\sqrt{\sum(\Delta 100T_i)^2}$ と表す。他の物理量も同様の扱いとする。周期データは表の形に見やすくまとめる（表には総和Σなどの項も入れたり結果を秒単位に変換して、参照しやすくなるように工夫すること）。一例として右上のような表があったとすると、 0 振動回数の時間と 100 振動回数の時間の差を取り、それを 100 周期分の時間を 10 回分得ることになる。このように大きく離れた時刻の差をとることでデータの独立性を保つことができ、10 個の 100 周期分のデータ（1 セット分）は互いに

独立であると考えてよい。この 1 セット分のデータは平均値と標準偏差でまとめ、さらに 5 セット以上分の平均値と標準不確かさでまとめて表す。

結果として、h=137.55 ± 0.05 [cm], T=2.3538 ± 0.0002 [s] を得たとすると（ただし、T の誤差は**標準不確かさ**で表す。ｈの誤差は標準偏差か器具精度の大きい方を表すが**標準不確かさ**として扱う）結果にはデータを詳細に、かつ分かり易く記載すること。単位の変換も適宜行うこと。特に有効数字の扱いには注意すること。

重力加速度 $g = 4\pi^2 h/T^2$ = 4X3.1416²X(1.3755)/(2.3538)² = 9.8012 [m/s²]

誤差は、 $\delta g/|g| \leqq \delta h/|h| + 2\delta T/|T|$ ――――（A）（相対誤差の和）

= 3.6X10⁻⁴ + 1.7X10⁻⁴ = 5.3X10⁻⁴

その結果、$\delta g = |g| \cdot \delta g/|g|$ = 9.80 X 5.3X10⁻⁴ = 5.2X10⁻³

＝0.005 （一桁にする）

δgを**標準不確かさ（u）**に相当すると考えて、それに 2 を掛けて 0.005X2=0.01 を**拡張不確かさ**として、

測定値は、9.80 ± 0.01 [m/s²] (CL95% or k=2)と表記する。（範囲 9.79~9.81）

もし上記（A）の「相対誤差の和」の代わりに、第 4 節で示した**相対不確かさの 2 乗和の平方根**を使うとすると、

$\delta g/g = \sqrt{(5/13755)^2 + (2X2/23538)^2}$ = 0.000401 = 4.01X10⁻⁴

δg=9.801X4.01X10⁻⁴ = 0.00393 =3.93X10⁻³

同様に 2 を掛けて拡張不確かさとして、0.008(一桁にする)を得て、

測定値は、9.801 ± 0.008 [m/s²] (CL95% or k=2)となる。（範囲 9.793~9.809） *最後の or はどちらかを書けばよいの意。*

上記「相対誤差の和」の表記より**相対不確かさの 2 乗和の平方根**の表記ほうが誤差範囲は若干小さくなるが、大きな差ではないものの論理的には後者の方がましであり、**レポートには後者を使うことを勧める。** *これらは一例であり、このままデータをコピーして使ってはいけない。*

考察： g値の基準値として国土地理院による推定g値（自由落下方式による絶対重力計などを用いて測定；公称精度は **2x10⁻⁸** [m/s²]）は、岐阜市（県庁付近）で 9.7975 [m/s²]が計測された値である。このg値は、地球上の場所（北緯東経）と高さ（標高）によって変わるが、愛知県の場合でも 9.7970 で、小数点以下 4 桁目が場所によって変わるだけである。上記の測定値は、誤差の範囲も考慮すると 9.79~9.81（あるいは後者の場合 9.793~9.809）の範囲にあることになり、リーズナブルな値であるということができる。*このように考察には得られたデータの評価も書くのが望ましい。*

感想：得られた測定データについての考察とは別に、この実験テーマをやった感想を書く。どの辺りが難しかったか、など。（*以上は例であるが、このようなことを考慮して報告書を完成させるとよい*）

１２．間接測定における相対的不確かさの計算例

ボルダの振り子による重力加速度ｇの測定を例に、ｇの誤差（不確かさ）Δｇの計算例を示す。重力加速度 g 値を求める方程式は、 $\mathbf{g = (4\pi^2/T^2)\{(l+r) + (2/5)r^2/(l+r)\}}$ ―――Ⓐ式（上記 11 節参照）、 であるので、これを不確かさ伝播則によってまともに計算してΔｇを求めると、次の式になる。

$$\mathbf{\Delta g = g\,[4(\Delta\pi/\pi)^2 + 4(\Delta T/T)^2 + \{(1-(2/5)r^2/(l+r)^2)/(l+r+(2/5)r^2/(l+r))\}(\Delta l)^2}$$
$$\mathbf{+ \{(1+(2/5)r(2l+r)/(l+r)^2)/(l+r+(2/5)r^2/(l+r))\}(\Delta r)^2\,]^{1/2}} \quad ―――Ⓐ' 式$$

これにそのまま値を入れて計算してもよいが、右式の 3, 4 項は若干複雑で計算間違いも起こりやすくなるので式の簡略化を試みてみる。まず、不確かさは有効桁数を 2 桁程度までしか使わないので、他の項と比べて 2 桁以上小さい値になる場合は無視できることがある。まず上記のⒶ式を変形すると、 $\mathbf{g = (4\pi^2/T^2)(l+r)\{1 + (2/5)r^2/(l+r)^2\}}$ ―――Ⓑ式、となる。この式からΔｇを求めるときは、Ⓑ式の{ }の中の 2 項目は概算すると（r=2[cm], l=96[cm]と置いて）2x10⁻⁴ になり、{ }の値は 1.0002 ぐらいになるので、1 と置いてよい。したがって、 $\mathbf{g = (4\pi^2/T^2)(l+r)}$としてΔｇを計算してよい（但し、最確値は元のⒷ式を用いて計算すべきである）。この**不確かさ伝播則**は、$\mathbf{(\Delta g/g)^2 = 4(\Delta\pi/\pi)^2 + 4(\Delta T/T)^2 + \{\Delta(l+r)/(l+r)\}^2}$ ――Ⓒ式、として表されるので簡略化された。このⒸ式の右式の 1 項目はπの有効桁数を使った処理になるが実際は 4x(0.0001/3.1416)² になるので、およそ 4x10⁻⁹ になる。同様に 2 項目は約 10⁻⁷、3 項目は（Δ(l+r)≒Δl と置い

てよい）4x10^{-8} 程度になる。1 項目は 2 項目より 2 桁近く小さく無視できるので結局、右式の概算値は 14x10^{-8} になり、この平方根は 3.7x10^{-4} になる。即ち、Δ g = g x 3.7x10^{-4} となるので、仮に g の最確値が 9.8012[m/s^2]だとすると g = 9.8 [m/s^2]とおいて計算してみると、Δ g =0.0036 となるので、最終的にはΔ g =0.004 と置ける。これに合わせて g の最確値は、小数点以下 3 桁目までとって表示すればよい。この誤差には T と l が一番効いていることが分かるので、T と l の計測には特に慎重になった方が良い。他の物理実験で使う伝播則の式はⒶ'よりは単純なことが多いので、比較的容易に計算できる。

補追：

A. 計量表記方法の変遷

JCGM（Joint Committee for Guides in Metrology：計量関連ガイドに関する合同委員会）という国際的委員会の設立（1997 年）と勧告。**GUM** の発行（1993 年；1995 年訂正版）と承認。

右表は、産総研・今井秀孝氏の発表（2011 年計測標準フォーラムで）スライドからの引用。↓略語表

・**SI**：International System of units（国際単位系）
・**GUM**：Guide to the expression of Uncertainty in Measurement, JCGM 100 ISO/IEC Guide 98-3:2008). 日本語への 翻訳版が「計測における不確かさの表現のガイド」として日本規格協会より1996年に刊行されている。
・**VIM**：International Vocabulary in Metrology, JCGM 200(ISO/IEC Guide 99, 2007); /国際計量計測用語(Corrected versionが2010年にISOから発行されている。英和の対訳版を日本規格協会が出版済)
・**JCGM**：Joint Committee for Guides in Metrology／計量に関するガイド国際合同委員会

JCGMを構成する組織は以下のとおり：BIPM～ILAC
・**BIPM**: Bureau International des Poids et Mesures(F), International Bureau of Weights and Measures（E），国際度量衡局，＜http://www.bipm.org＞
・**IEC**：International Electrotechnical Commission，国際電気標準会議＜http://www.iec.ch＞
・**IFCC**：International Federation of Clinical Chemistry and Laboratory Medicine，国際臨床化学連合＜http://www.ifcc.org＞
・**ISO**：International Organization for Standardization，国際標準化機構＜http://www.iso.org＞
・**IUPAC**:International Union of Pure and Applied Chemistry,国際純正・応用化学連合<http://www.iupac.org>
・**IUPAP**:International Union of Pure and Applied Physics,国際純粋・応用物理学連合<http://www.iupap.org>
・**OIML**：International Organization of Legal Metrology，国際法定計量機関＜http://www.oiml.org＞
・**ILAC**:International Laboratory Accreditation Cooperation,国際試験所認定協力機構＜http://www.ilac.org＞

・**CGPM**：General Conference on Weights and Measures／国際度量衡総会
・**CIPM**：International Committee for Weights and Measures／国際度量衡委員会
・**MRA**：Mutual Recognition Arrangement／相互承認協定
・**NMI**：National Metrology Institute／国家計量標準研究所
・**CMC**:Calibration and Measurement Capability／測定校正能力
・**IMEKO**：International Measurement Confederation／国際計測連合 <http://www.imeko.org>

表1　誤差評価(EA)と不確かさ評価(UA)の比較

関連項目	誤差評価(EA)	不確かさ評価(UA)
① 真の値	存在を前提	考慮しない
① ばらつきの指標	標準偏差	標準不確かさ(標準偏差)
① ばらつきの推定	偶然誤差，系統誤差	統計的方法（タイプA），統計以外の方法（タイプB）
① ばらつきの合成	二乗和の平方根 代数和	二乗和の平方根
① 信頼の水準	標準偏差の倍数	包含区間，包含係数(*k*)，包含確率(約95 %)
① 最終的な表現	決定的な方法なし	拡張不確かさ（総合評価）

https://www.nmij.jp/public/event/2010/forum2010/presentation/imai.pdf

B. 実験ノートの重要性と書き方

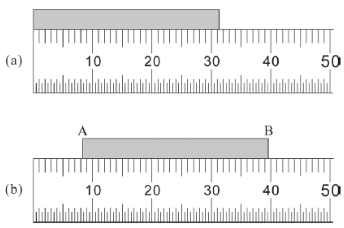
＊必ず自分用のノートを用意すること!（記録が無ければ，実験は無意味になるし、あとで確認のしようがない）A4 サイズのキャンパスノートやファイルに綴じたルーズリーフ使用可。

ノートに記入すべきこと：　実験日や気温・湿度・気圧など、使用した実験装置や実験の条件、測定結果は細大漏らさず、実験中に気付いたこと、教員や TA に注意や指示されたこと、共同実験者と議論したこと、等。実験ノートは自分だけが見るものではなく、共同実験者や第 3 者が参照することもあるということを前提にして、記録する必要がある。

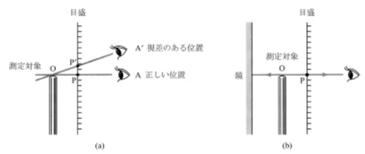
注意：　説明を加えながら記録する、余白を十分に取る、間違えたことでもなるべく消しゴムでは消さない、修正は横線 2 本で、文字や数式は丁寧に書く（数字や記号など読み間違いしないように、なぐり書きはしない）、報告書（レポート）は実験ノートを見ながら整理してまとめて清書する、など。

C. 目視測定上の注意

1．定規や巻尺で長さを測るとき、右図の(a)より(b)のように、左端からではなく途中の所で A 位置と B 位置の目盛を読んで引き算で長さを出した方が良い。繰り返し測るときは読み取り位置を変えて AB の位置を測る。

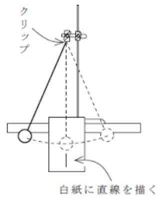


2．測定対象と目盛が密着していない時は、目線（視線）は目盛面に対して垂直になるような位置で読み取る。（右図）水銀温度計やメスシリンダーで液体の体積を測るときなども同様である。



　実験室にある乾湿温度計のようなガラス製水銀温度計で温度を測るときは、最小目盛り（長線）1°C、副目盛（短線）0.5°Cのマークがある場合、読み取りは 1/10 °Cまで目視で行い、誤差の表記は$(0.5\div2)/\sqrt{3}=0.144$（**タイプ B 評価**）を（繰り上げて）0.2°Cとおいて、例えば 25.4±0.2 [°C] としてもよい。現実的には誤差（器具精度）は 0.2~0.5°Cの範囲で観測者の認識力の程度（自己判断）に応じて選べばよい。副目盛 0.5°Cがない場合は、誤差は$(1.0\div2)/\sqrt{3}=0.3$ [°C]とする（例：25.4±0.3 [°C]）が、現実的には誤差は 0.3~0.5°Cで選んでよい。（あまり訓練されていない観測者にとって誤差は大きめにとるのが妥当（信頼水準を上げるため）であり、気象庁採用の電気式温度計でさえも誤差（公差）は±0.2°C程度であるので [G5]、実験室の乾湿温度計の器具精度としての誤差は 0.1°C以下にはしない方が良い）

3．右図のように振り子の周期をストップウォッチで測るとき（捻じれ振り子も同様）は、一番速い動きをする位置（振り子の中心線）に線を引きそこを通過する時点を測る。人によって測るタイミングに癖が出るので、3 人以上で交代しながら測ると系統的（読み取りの癖等）偏りを少なくできる可能性がある。

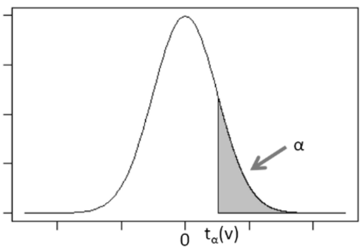


4．デジタルストップウォッチの読み取り誤差について、通常、最小単位は 0.01 [s] なので読み取り誤差はその半分の 0.005 [s]になる。この場合はタイプ B 評価として$\sqrt{3}$ で割るという作業はしない。２つの読み取り時間の差を求めたとき、その誤差（器具精度）は、足し算して 0.01 [s]と表すのではなく、2 乗和の平方根$\sqrt{(0.005^2+0.005^2)}=0.007$ として表した方が良い。（振り子などの周期を計測するときに利用）一般にデジタル機器の誤差は**最小単位の半分**になると考える（化学天秤、温度計、電流計、等）。

D.　*t* 分布表

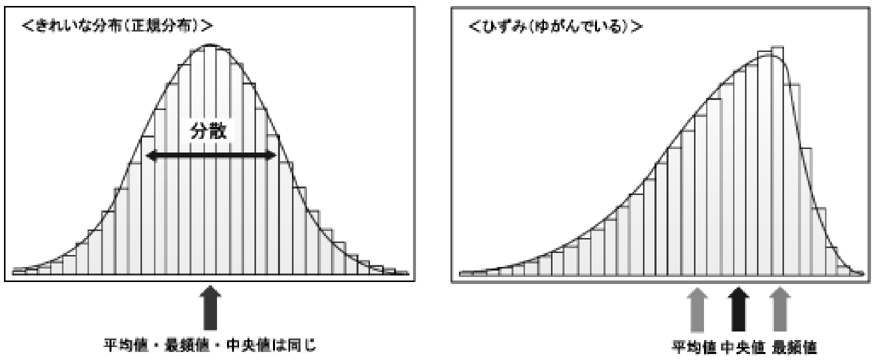
t分布表

α /2 α n	0.25 0.5	0.2 0.4	0.15 0.3	0.1 0.2	0.05 0.1	0.025 0.05	0.01 0.02	0.005 0.01	0.0025 0.005
1	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	509.2952
2	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	28.2577
3	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	11.9838
4	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	8.1216
5	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	6.5414
6	0.7176	0.9057	1.1342	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.7090
7	0.7111	0.8960	1.1192	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	5.2022
8	0.7064	0.8889	1.1081	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	4.8636
9	0.7027	0.8834	1.0997	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.6224
10	0.6998	0.8791	1.0931	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.4423
11	0.6974	0.8755	1.0877	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.3028
12	0.6955	0.8726	1.0832	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	4.1918
13	0.6938	0.8702	1.0795	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	4.1013
14	0.6924	0.8681	1.0763	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	4.0263
15	0.6912	0.8662	1.0735	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	3.9630
16	0.6901	0.8647	1.0711	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	3.9089
17	0.6892	0.8633	1.0690	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.8623
18	0.6884	0.8620	1.0672	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.8215
19	0.6876	0.8610	1.0655	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.7857
20	0.6870	0.8600	1.0640	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.7539
21	0.6864	0.8591	1.0627	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.7255
22	0.6858	0.8583	1.0614	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.7000
23	0.6853	0.8575	1.0603	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.6770
24	0.6848	0.8569	1.0593	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.6561
25	0.6844	0.8562	1.0584	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.6371
26	0.6840	0.8557	1.0575	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.6197
27	0.6837	0.8551	1.0567	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.6037
28	0.6834	0.8546	1.0560	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.5889
29	0.6830	0.8542	1.0553	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.5753
30	0.6828	0.8538	1.0547	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.5626
50	0.6794	0.8489	1.0473	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778	3.4214
60	0.6786	0.8477	1.0455	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603	3.3876
80	0.6776	0.8461	1.0432	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387	3.3462
99	0.6770	0.8453	1.0419	1.2902	1.6604	1.9842	2.3646	2.6264	3.3227
100	0.6770	0.8452	1.0418	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259	3.3218



左図は t 分布（全部の面積は 1）で、n（自由度）が増えると正規分布に近づく。グレー部分の面積が α となる t の値 $t_\alpha(n)$を表す。自由度が 10 で、有意水準 α が 0.05（両側）のとき t 値は 2.2281 となる。測定数が 10 のとき自由度は 9 であり、有意水準が 0.5 のとき（信頼水準 50%） t 値は 0.7027 になる。

E. 分布の見方



データのばらつき具合は分布図（ヒストグラム）で視覚化できる。分布図が対称で正規分布に近い場合は、**平均値（Mean）、最頻値（Mode）、中央値（Median）**は同じになるが、非対称で歪んだ分布になっている場合は平均値、最頻値、中央値は異なる。（右図参照）中央値は、その分布図の左右の面積が同じになるところである。最頻値が 2 つあるときは「二峰性（bimodal）」であるといい、3 つ以上あるときは「多峰性（multimodal）」であるという。ある標本のデータ分布の歪みの程度を表す指標は**歪度(Skewness)**といい、$\{n(n-2)/(n-1)\}\Sigma\{(x_i-m)^3/s^3\}$　で表される（x_i というデータ標本の平均値は m、標準偏差は s とする；母集団については$(1/n)\ \Sigma\{(x_i-m)^3/s^3\}$）。因みに、表 10-1 のデータでは、**Mean = 10.0023, Median = 10.0045, skewness = -0.43** になる（Excel を使用）。これは、歪度は負で少し左に裾を引いたような歪みのある分布になっていることを示しているが、中央値と平均値の差が 0.0022 と、平均値の標準偏差（標準誤差 SE）よりもだいぶ小さい（平均値の 0.002%）ので、中央値と平均値にはあまり差は無いと言えるので、正規分布に近い対称性をもったデータ分布であることが再確認できる。このように 10 個程度の測定データが正規分布に近いものかどうかは、平均値と中央値を比較しその差がどれほど小さいか、を評価することでも可能である。

F．表記法（不確かさ）

F．表記法（不確かさ）○ d=5.125±0.002 (mm); ×d=5.125±2x10^{-3} (mm); ×d=5.125mm±2μm

○ α=(22.9±0.5)x10^{-6} K^{-1}; × α=22.9x10^{-6}±5x10^{-7} K^{-1} （**不確かさは１～２桁で表し**、物理化学実験等では通常は 1 桁で表す）*ただし、医学論文などでは、例えば「n=34, ある血液成分の濃度 115.97±24.85 (mg/dL) or 115.97 (24.85) 」などと表されることがあり、許されている。*

G．参考文献

１．（不確かさの入門ガイド：製品評価技術基盤機構）http://www.nite.go.jp/data/000050641.pdf

２．（不確かさ評価入門：産業技術総合研究所）
https://unit.aist.go.jp/mcml/rg-mi/uncertainty/docs2/IntroductionToUncertainty.pdf

３．田中秀幸著：分析測定データの統計処理（朝倉書店、2014）.

４．IUPAC 2007 第 3 版、物理化学で用いられる量・単位・記号、（訳）産総研計量標準総合センター、
https://www.nmij.jp/public/report/translation/IUPAC/iupac/iupac_green_book_jp.pdf

５．温度計の技術情報について：http://www.sankikeiso.co.jp/tec_temp_hum.html