岐阜数学教育研究
2002,Vol. 1, 64-74

現象を数学的にとらえる教材の提案

岩崎美奈[1]，愛木豊彦[2]

現在，科学技術は日々進歩を遂げる中，教育現場では生徒の「理数科離れ」が深刻となっている。理数科離れの一原因に「数学は何の役に立つのかわからない」という生徒の学習意欲の低下がある。生徒の学習意欲を増すためには，数学を使うこと，つまり数学の有用性を感得すること，数学と現実世界との接点に触れることが必要だと考える。本論文では，身近な現象の数学的な解決を課題とする，数理科学の方法を用いた日常の授業とは異なる別の視点からのアプローチによって提案した教材による授業実践報告を行う。

＜キーワード＞数理モデル, 高等学校, 物体の運動, 三角比の応用, 関数

1. はじめに

現在，情報化が進み，科学技術が大きな進歩を遂げている。その一方，教育現場では生徒の「理数科離れ」が深刻となっている。この現状を打破するために，これからの数学の授業には，理数科離れ食い止めへの対応と科学技術の発展への対応が必要であると考える。

まず，理数科離れへの対応について述べる。理数科離れの原因の一つには，生徒の「数学を勉強して何の意味があるか分からない」「数学なんか役に立たない」という思いによる学習意欲の低下が挙げられる。今まで数学の授業では，数学ができることや解ることに重点を置く傾向が強かった。これは，数学の有用性を感得する場ともなる数学を使う学習，つまり数学を現実世界における現象に適用して学習する機会が不足していたということである。特に，高等学校での数学の学習は内容の抽象性が増すため，数学への興味・関心を抱くどころか，数学に対する嫌悪感が増す場となりかねない。そこで，数学の有用性の感得を目指し，数学を使って身近な現象を解決する学習が必要であると考えた。

次に科学技術の発展への対応について述べる。科学技術の発展と共に，数学も最先端ではさまざまな研究がなされている。それらの研究方法の一つとして数理科学の方法 (数理モデル) がある。数理科学の方法の教材化の有効性については，すでに剣持, 越川 [1]，愛木 [2] で述べられている。これを取り扱うことは，計算問題のみの詰め込み型の授業から思考過程に重点を置く授業へと変わるきっかけとなるだろう。さらに，数学と現実世界との接点に触れることは，生徒の数学への興味・関心を高めることにつながるだろう。

以上に述べたことから，本論文では身近な現象から生じる問題の数学による解決を課題とする高等学校用教材の提案を行う。それらは，数理モデル構成を扱うなど，数学の研究過程を味わうような日常の授業ではあまり取り扱わない別の視点からのアプローチによって考察された教材である。

[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

2. 教材について

実践では物理の未習を前提としたため，物理の内容に関して簡単に説明を行った。説明時間を短縮するために，物理の教科書とは異なる導入を行った。その点のみを紹介する。

＜定義＞

数直線上にある点の時刻 t における位置 x が t の 1 次関数として，$x = at + b$ (a, b は定数）と表されるとき，その点は等速直線運動をしているといい, その速度を a と定める。

数直線上にある点の時刻 t における位置 x が t の関数として，$x = at^2 + bt + c$ (a, b, c は定数）と表されるとき，その点は等加速度直線運動をしているといい, その加速度を $2a$，時刻 t での速度を $2at + b$ と定める。

以下に述べる教材では，この定義に従い問題の解答を与える。

教材を簡単に説明する。

i) 遅い球

この問題は身近な現象の数学的解決に焦点をあてたものである。

必要な既習事項：ベクトル，2 次関数，三角比，2 倍角の公式，物体の運動 (物理)

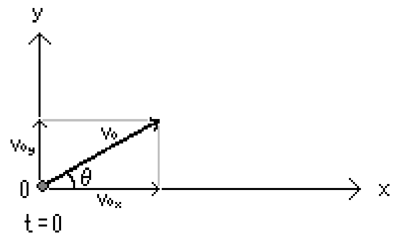
＜問題＞

距離 ℓm 離れた人に向けボールを投げる。今，できるだけ遅い速度で投げたい。このようなボールを投げるときの角度と初速を求めよう。ただし，投げるところと受け取るところの高さは等しいとする。

練習問題：投手が投げるボールのうち，捕手まで届く最も遅いボールの時速を求めよ。ただし，マウンドの高低差は考慮しないとし，$g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ (g は重力加速度)，(投手と捕手の距離) $= 18.44$m とする。

＜解答＞

投げるときの時刻を $t = 0$，投げるところの高さを 0 とする。初速度を v_0，投げる角度を θ とする。初速度を水平方向と垂直方向に分解したものを，(v_{0x}, v_{0y}) とする。時刻 t での位置を (x_t, y_t)，速度ベクトルを $\overrightarrow{v}(t)$ と書くこととする。ボールは水平方向では等速直線運動，垂直方向では等加速度運動を行う。



物体の時刻 t での位置を求める。

(1) 水平方向について

等速直線運動をしているので，x_t は，$x_t = at + b$（a，b：定数）と表せる (a は速度となる)。水平方向に関する速度は $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ なので，$a = v_0 \cos\theta$ となる。また，$t = 0$ での位置が 0 なので，$b = 0$ となる。よって，$x_t = v_0 t \cos\theta$ ，速度は $v_0 \cos\theta$ となる。

(2) 垂直方向について

等加速度運動をしているので，y_t は，$y_t = at^2 + bt + c$（a，b，c：定数）と表せる (加速度は $2a$，時刻 t での速度は $2at + b$ となる)。垂直方向に関して $t = 0$ での位置が 0 なので，$c = 0$ となる。また，$t = 0$ での速度が $v_0 \sin\theta$ なので，$2a \times 0 + b = v_0 \sin\theta$ より $b = v_0 \sin\theta$ となる。さらに，下向きに一定の力 mg がかかるので (m は物体の質量)，ニュートンの運動方程式から，$-mg = m \times 2a$ が成り立つ。よって，$a = -\frac{g}{2}$ となる。以上より，$y_t = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin\theta$，速度は $2at + b = v_0 \sin\theta - gt$ となる。

(1)，(2) より時刻 t におけるボールの位置は，$(v_0 t \cos\theta, -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \sin\theta)$，速度ベクトルは，$\overrightarrow{v}(t) = (v_0 \cos\theta, v_0 \sin\theta - gt)$ となる。

ボールが相手に届くときを考える。ボール

が相手に届く時間を $T(\neq 0)$ とすると，このときの位置が $(\ell\ ,\ 0)$ となればいいので，

$$v_0T\cos\theta=\ell,\ -\frac{g}{2}T^2+v_0T\sin\theta=0$$

これより，

$$T=\frac{\ell}{v_0\cos\theta}=\frac{2v_0\sin\theta}{g} \tag{2.1}$$

$t=T$ のとき，速さ (速度の大きさ) の最も遅い場合を考える。

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{v}(T)|^2&=v_0^2\cos^2\theta+(v_0\sin\theta-gT)^2\\&=v_0^2-2v_0gT\sin\theta+g^2T^2\\&=v_0^2-2v_0g\tfrac{2v_0\sin\theta}{g}\sin\theta+g^2(\tfrac{2v_0\sin\theta}{g})^2\\&=v_0^2-4v_0^2\sin^2\theta+(2v_0\sin\theta)^2\\&=v_0^2\end{aligned}$$

(2.1) から $v_0^2=\frac{g\ell}{\sin 2\theta}$ なので，$|\overrightarrow{v}(T)|^2=\frac{g\ell}{\sin 2\theta}$ となる。したがって $g\ell$ は定数なので，$\sin 2\theta=1$ となるとき速さは最小となる。ゆえに，45 度の角度で $v_0=\sqrt{g\ell}$ で投げればよい。

〈練習問題〉

$$\sqrt{g\ell}=\sqrt{9.8\times 18.44}=\sqrt{180.712}$$

$$13.44\ \mathrm{m/s}=48.384\ \mathrm{km/h}$$

よって 45 度の方向に時速約 48km の球を投げればよい。

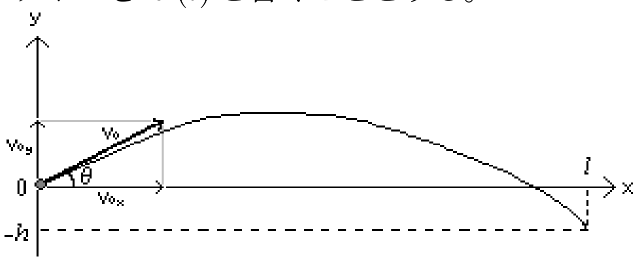
ii) 遅い球の発展問題

これは先の i) 遅い球の発展問題である。必要な既習事項：ベクトル，2 次関数，三角比，物体の運動 (物理)

＜問題＞
距離 ℓ 離れた人に向ってボールを投げる。投げるところは受け取るところより h 高いとする。今，受け取る位置でできるだけ遅い速度の球を投げたい。
(1) このようなボールを投げるときの角度と速さを求めよ。
(2) 問題 i) で求めた初速より問題 ii) の (1) で求めた初速の方が速いことを示せ。
(3) 高低差が大きくなると最遅球の初速も速くなることを示せ。
練習問題：マウンドの高低差や投手のボールを離す位置，捕手の受け取る位置などを考えて，投手が投げるボールのうち，捕手まで届く最も遅いボールの時速を求めてみよう。
参考：$g=9.8\mathrm{m/s^2}$(g は重力加速度)，(投手と捕手の距離)$=18.44$m，(マウンドの高さ) $=25.4$cm

＜解答＞

(1) 投げるときの時刻を $t=0$，投げるところの高さを 0 とする。初速度を v_0，投げる角度 θ とする。時刻 t での位置を $(x_t\ ,\ y_t)$，速度ベクトルを $\overrightarrow{v}(t)$ と書くこととする。



水平方向，垂直方向について，i) と同様に考えればよいので，時刻 t におけるボールの位置は，$(v_0t\cos\theta,-\frac{g}{2}t^2+v_0t\sin\theta)$，速度ベクトルは，$\overrightarrow{v}(t)=(v_0\cos\theta,v_0\sin\theta-gt)$ である。

ボールが相手に届くときを考える。ボールが相手に届く時間を $T(\neq 0)$ とすると，このときの位置が $(\ell\ ,\ -h)$ となればいいので，

$$v_0T\cos\theta=\ell \tag{2.2}$$

$$-\tfrac{g}{2}T^2 + v_0 T\sin\theta = -h \qquad (2.3)$$

$t = T$ のとき，速さ (速度の大きさ) の最も遅い場合を考える。

$|\overrightarrow{v}(T)|^2 = v_0^2\cos^2\theta + (v_0\sin\theta - gT)^2$
$= v_0^2\cos^2\theta + v_0^2\sin^2\theta - 2v_0 gT\sin\theta + g^2T^2$
$= v_0^2 - 2v_0 gT\sin\theta + g^2T^2$

これに (2.2) を代入すると，

$$|\overrightarrow{v}(T)|^2 = v_0^2 - 2v_0 g\frac{\ell}{v_0\cos\theta}\sin\theta + g^2\left(\frac{\ell}{v_0\cos\theta}\right)^2$$
$$= v_0^2 + \frac{g^2\ell^2}{v_0^2\cos^2\theta} - 2g\ell\tan\theta \qquad (2.4)$$

ここで (2.3) に (2.2) を代入すると，

$$-\frac{g}{2}\left(\frac{\ell}{v_0\cos\theta}\right)^2 + v_0\frac{\ell}{v_0\cos\theta}\sin\theta = -h$$
$$\ell\tan\theta + h = \frac{g\ell^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$
$$v_0^2 = \frac{g\ell^2}{2\cos\theta(\ell\sin\theta + h\cos\theta)}$$

となるので，これを (2.4) に代入すると，

$$|\overrightarrow{v}(T)|^2 = \frac{g\ell^2}{2\cos\theta(\ell\sin\theta + h\cos\theta)}$$
$$+\frac{g^2\ell^2}{\cos^2\theta}\times\frac{2\cos\theta(\ell\sin\theta + h\cos\theta)}{g\ell^2} - 2g\ell\tan\theta$$
$$= \frac{g\ell^2}{2\cos\theta(\ell\sin\theta + h\cos\theta)} + 2gh$$

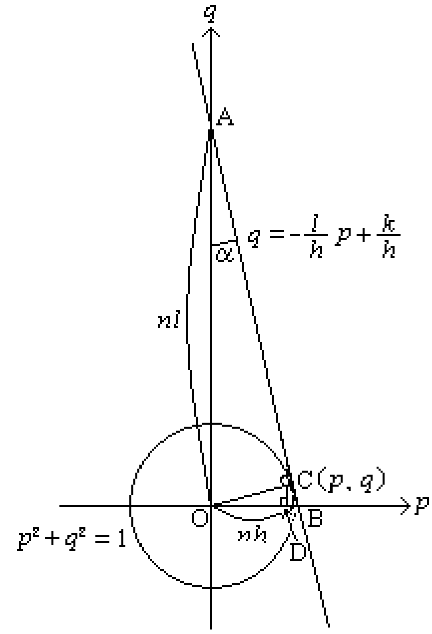
したがって，$|\overrightarrow{v}(T)|^2$ が最小となるには，$2\cos\theta(\ell\sin\theta + h\cos\theta)$ が最大になればよい。

$2\cos\theta(\ell\sin\theta + h\cos\theta) = \mathrm{S}$ とおくと，

$$\mathrm{S} = 2\cos\theta(\ell\sin\theta + h\cos\theta)$$
$$= 2\ell\sin\theta\cos\theta + 2h\cos^2\theta$$
$$= \ell\sin 2\theta + h\cos 2\theta + h$$

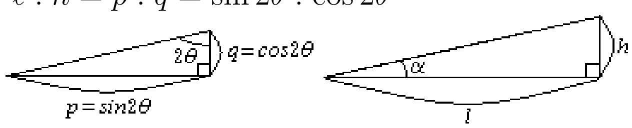
$p=\sin 2\theta$，$q=\cos 2\theta$ とし，$p^2+q^2=1$ のときの $\ell p + hq(= k)$ の最大値を求めればよい。(三角関数の合成を用いても求めることができるが，未習の生徒を考慮して，比較的分かりやすい方法で求める。)

$q = -\frac{\ell}{h}p + \frac{k}{h}$ となるので，次の図のように接するとき k が最大となる。このとき $\angle\mathrm{OAB} = \alpha$ とする。また，図では $\frac{k}{h\ell} = n$ としている。



このとき $\triangle\mathrm{AOB} \backsim \triangle\mathrm{OCB} \backsim \triangle\mathrm{ODC}$ より

$\ell : h = p : q = \sin 2\theta : \cos 2\theta$



よって $\alpha = 90 - 2\theta$ のとき k は最大となる。

このとき，

$$\sin 2\theta = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2+h^2}}, \cos 2\theta = \frac{h}{\sqrt{\ell^2+h^2}}$$

となるので，最大となる S は

$$\mathrm{S} = \frac{\ell^2}{\sqrt{h^2+\ell^2}} + \frac{h^2}{\sqrt{h^2+\ell^2}} + h$$
$$= \sqrt{\ell^2+h^2} + h$$

よって，最小となる $|\overrightarrow{v}(T)|^2$ は，

$|\overrightarrow{v}(T)|^2 = \dfrac{g\ell^2}{h+\sqrt{\ell^2+h^2}} + 2gh$ である。

したがって，$|\overrightarrow{v}(T)| = \sqrt{\dfrac{g\ell^2}{h+\sqrt{\ell^2+h^2}} + 2gh}$ で $\dfrac{90-\alpha}{2}$ の方向に投げればよい。

(2) $\dfrac{g\ell^2}{h+\sqrt{\ell^2+h^2}} + 2gh > g\ell$ を示せばよい。

ただし，$h > 0$ とする。$g > 0$ より

$$\frac{\ell^2}{h+\sqrt{\ell^2+h^2}} + 2h > \ell$$

を示せばよく，さらに計算すると，

$\ell^2+2h(h+\sqrt{\ell^2+h^2})>\ell(h+\sqrt{\ell^2+h^2})$

$\ell^2> h(\ell-2h)+(\ell-2h)\sqrt{\ell^2+h^2}$

となるのでこれを示せばよい。

$\ell< 2h$ のとき (右辺) $=$ 負となり常に成り立つ。よって $\ell\geqq 2h$ のときのみを考える。

$\ell^2+2h^2-\ell h>(\ell-2h)\sqrt{\ell^2+h^2}$ を示す。

$$\begin{aligned}\ell^2+2h^2-\ell h &= \ell(\ell-h)+2h^2\\ &\geqq 0 \quad (h\leqq\tfrac{\ell}{2}\leqq \ell \text{より})\end{aligned}$$

従って，

$(\ell^2+2h^2-\ell h)^2>(\ell-2h)^2(\sqrt{\ell^2+h^2})^2$

が成り立てばよい。

$$\begin{aligned}&(\ell^2-h(\ell-2h))^2-(\ell-2h)^2(\sqrt{\ell^2+h^2})^2\\ &=\ell^4-2\ell^2h(\ell-2h)+h^2(\ell-2h)^2\\ &\qquad -(\ell-2h)^2(\ell^2+h^2)\\ &=\ell^4-2\ell^3h+4\ell^2h^2-\ell^4+4\ell^3h-4\ell^2h^2\\ &=2\ell^3h>0\end{aligned}$$

よって $\dfrac{g\ell^2}{h+\sqrt{\ell^2+h^2}}+2gh>g\ell$ が成り立つ。

(3)$0<h<h'$ のとき

$$\frac{g\ell^2}{h+\sqrt{\ell^2+h^2}}+2gh<\frac{g\ell^2}{h'+\sqrt{\ell^2+h'^2}}+2gh'$$

を示せばよい。

$(h+\sqrt{\ell^2+h^2})(h-\sqrt{\ell^2+h^2})=-\ell^2$ より，

$\dfrac{\ell^2}{h+\sqrt{h^2+\ell^2}}=-(h-\sqrt{\ell^2+h^2})$ なので，

$$\begin{aligned}\frac{g\ell^2}{h+\sqrt{\ell^2+h^2}}+2gh &= -gh+g\sqrt{\ell^2+h^2}+2gh\\ &= gh+g\sqrt{\ell^2+h^2}\end{aligned}$$

同様に

$$\frac{g\ell^2}{h'+\sqrt{\ell^2+h'^2}}+2gh'=gh'+g\sqrt{\ell^2+h'^2}$$

仮定より $h<h'$なので，

$gh+g\sqrt{\ell^2+h^2}< gh'+g\sqrt{\ell^2+h'^2}$

よって，

$$\frac{g\ell^2}{h+\sqrt{\ell^2+h^2}}+2gh<\frac{g\ell^2}{h'+\sqrt{\ell.^2+h'^2}}+2gh'$$

〈練習問題〉

高低差が 2 m であるとすると, 約 51 km/h となる。

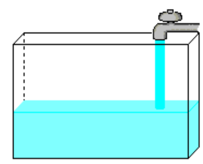
iii) 水槽にたまる水

これは既に [2] で提案された問題である。証明が不足していた部分を補い，改めて高校生用教材とした。身近な現象を数学的に解決する問題であり，現象をより厳密に考察するという視点の教材である。

必要な既習事項 : 2 次関数，2 次方程式，物体の運動 (物理)

＜問題＞

今，底面積が $30\mathrm{cm}^2$ で高さが 10cm の水槽がある。この水槽に 1 秒間に $10\mathrm{cm}^3$ 水道から水を注ぐ。



(注)1 秒間に $10\mathrm{cm}^3$ 水道から水を注ぐとは，

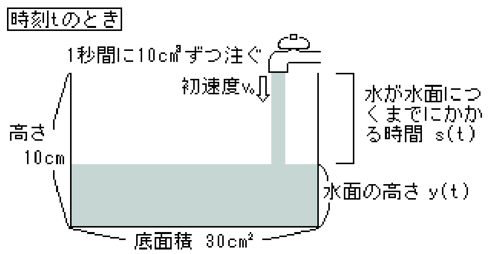
1 秒間に $10\mathrm{cm}^3$ ずつ水槽にたまっていく

1 秒間に $10\mathrm{cm}^3$ ずつ蛇口から出ていく

の 2 通りの解釈ができる。

(1) 時刻 t のときの水面の高さを $y(t)$cm とする。水が水槽の底面に到着するまでにかかる時間を $s(t)$，水の注ぎ口での初速度を v_0 とする。　　の解釈それぞれに対して，t と $y(t)$ の関係を数式で表そう。

ヒント：蛇口の注ぎ口を原点とし下向きに数直線をとったときの，水滴の運動について考えよう。



＜今後　の解釈を前提とする＞

(2) 水道から出た水の量に注目し，式をたてよう。

(3) 満水になる時刻 T を求めよう。

(4) $y(t)$ を t の式で表そう。

＜解答＞

(1)　のとき,$10t = 30y(t)$ よって $y(t) = \frac{1}{3}t$ 。

のとき，蛇口の注ぎ口を原点とし，下向きに数直線をとる。重力加速度を g (m/s^2) に対し，計算を簡単にするために $g' = 100g$ (cm/s^2) とおく。水滴は下向きに一定の力 mg' がかかっているので，等加速度運動をする。等加速度運動をしている場合，時刻 t における位置 x は，$x = at^2 + bt + c$（a，b，c は定数）と表せる (加速度は $2a$，時刻 t での速さは $2at + b$ となる)。$t = 0$ での速度が v_0 なので，$b = v_0$。時刻 $t = 0$ での位置が 0 より，$c = 0$。水滴には一定の力 mg' がかかるので，水滴の質量を m とすると $m \times 2a = mg'$ より $a = \frac{g'}{2}$。よって時刻 t における位置 x は，$x = \frac{g'}{2}\, t^2 + v_0 t$ となる。(水滴が $s(t)$ 秒間で動く距離) = (水槽の高さ) − (時刻 t における水位) が成り立つので，$\underline{\frac{g'}{2}\, s(t)^2 + v_0 s(t) = 10 - y(t)}$

(2)(水槽にたまった水の量) ＋ (流れている水の量) ＝ (水道から出た水全部の量) より，
$\underline{30y(t) + 10s(t) = 10\, t}$

(3) (1)，(2) より

$$\frac{g'}{2}\, s(t)^2 + v_0 s(t) = 10 - y(t) \qquad (2.5)$$

$$30y(t) + 10s(t) = 10\, t \qquad (2.6)$$

$y(T) = 10$ なので (2.5) より

$$\frac{g'}{2}\, s(T)^2 + v_0 s(T) = 10 - 10 = 0$$

$$g'\, s(T)^2 + 2v_0 s(T) = 0$$

ゆえに $s(T) = 0\ ,\ -\frac{2}{g'}v_0$

$s(T) \geq 0$ より，$s(T) = 0$

これを (2.6) に代入すると，

$30 \times 10 + 10 \times 0 = 10\,T$　　　よって $\underline{T = 30}$

(4)$30y(t) + 10s(t) = 10t$ より $s(t) = t - 3y(t)$ を (2.5) に代入すると，

$$\frac{g'}{2}(t - 3y(t))^2 + v_0(t - 3y(t)) = 10 - y(t)$$

$$gt^2 - 6g'ty(t) + 9g'y(t)^2 + 2v_0 t - 6v_0 y(t) = 20 - 2y(t)$$

$$9g'y(t)^2 + 2(1 - 3g't - 3v_0)y(t) + g't^2 + 2v_0 t - 20 = 0 \qquad (2.7)$$

(2.7) を y の 2 次方程式とみて判別式 D を計算する。

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (1 - 3g't - 3v_0)^2 - 9g'(g't^2 + 2v_0 t - 20)\\ &= 1 - 6g't - 6v_0 + 9v_0^2 + 180g'\\ &= 9(v_0^2 - \tfrac{2}{3}v_0) + 180g' + 1 - 6g't\\ &= 9\{(v_0 - \tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{1}{9}\} + 180g' + 1 - 6g't\\ &= 9(v_0 - \tfrac{1}{3})^2 + 6g'(30 - t)\end{aligned}$$

今，$t < 30 = T$ より $30 - t > 0$ である。よって $\frac{D}{4} \geq 0$ より 2 次方程式 (2.7) は解を持つ。

$1 - 3g't - 3v_0 = B$，$g't^2 + 2v_0 t - 20 = C$ とおくと，(2.7) は $9g'y(t)^2 + 2B\, y(t) + C = 0$ となる。これを y について解くと，

$$y(t) = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 9g'C}}{9g'}$$

ここで問題となるのは，$y(t) = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 9g'C}}{9g'}$ なのか $y(t) = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 9g'C}}{9g'}$ なのかということである。ところで，$y = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - R}}{P}$ ($P > 0$) の場合，

ア.$Q > 0$，$R > 0$ のとき $y < 0$
イ.$Q > 0$，$R < 0$ のとき $y > 0$
ウ.$Q < 0$，$R > 0$ のとき y の符号決まらない
エ.$Q < 0$，$R < 0$ のとき $y > 0$

のように Q，R の符号により y の符号が定まる場合がある。そこで B，C の正負を吟味する。$C = g't^2 + 2v_0 t - 20$ について考える。t_0 を最初の水滴が水槽の底面に到着する時間とする。$t = t_0$ のとき $s(t_0) = t_0$，$y(t_0) = 0$ なので (2.5) より，$\frac{g'}{2}t_0^2 + v_0 t_0 = 10$ が成り立つ。(2.6) が成立するためには $t \geq t_0$ なので，

$$\frac{g'}{2}\, t^2 + v_0 t \geq \frac{g'}{2}\, t_0^2 + v_0 t_0 = 10$$

$$g't^2 + 2v_0 t \geq 20$$

$$g't^2 + 2v_0 t - 20 \geq 0$$

ゆえに $C \geq 0$ より，アまたはウの場合が考えられるが，$y(t) < 0$ ではないのでウである。

よって $y(t) = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 9g'C}}{9g'}$ または $y(t) = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 9g'C}}{9g'}$ である。

ここで，$t = t_0$ のときを考える。$y(t_0) = 0$

でなくてはいけない。
$B = 1 - 3g't_0 - 3v_0 < 0$
$C = g't_0^2 + 2v_0t_0 - 20 = 0$ より
$y(t_0) = \frac{-B+\sqrt{B^2-9g'C}}{9g'} = \frac{-B+\sqrt{B^2}}{9g'} = \frac{-2B}{9g'}$
$y(t_0) = \frac{-B-\sqrt{B^2-9g'C}}{9g'} = \frac{-B-\sqrt{B^2}}{9g'} = 0$
$B = 0$ とすると，$t > t_0$ で $B^2 - 9g'C < 0$ となるので不適。よって $B \neq 0$ なので，

$$y(t) = \frac{-B-\sqrt{B^2-9g'C}}{9g'} \qquad (2.8)$$

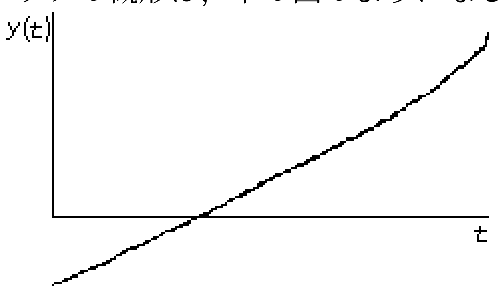
が適する。

$y(t) = \frac{-B+\sqrt{B^2-9g'C}}{9g'}$ と $y(t) = \frac{-B-\sqrt{B^2-9g'C}}{9g'}$ のグラフが交わるところを考える。

$$\frac{-B+\sqrt{B^2-9g'C}}{9g'} = \frac{-B-\sqrt{B^2-9g'C}}{9g'}$$
$$\sqrt{B^2-9g'C} = -\sqrt{B^2-9g'C}$$

よって $B^2 - 9g'C = 0$ のとき交わる。
$B^2 - 9g'C = 9(v_0 - \frac{1}{3})^2 + 6g'(30 - t)$ で，$9(v_0 - \frac{1}{3})^2 \geq 0$，$30 - t \geq 0$ から，交わるのは $t = 30$ のときである。$t_0 \leq t \leq 30$ を考えているので，$t_0 \leq t \leq 30$ では常に (2.8) の式の値をとる。なぜならば, 連続なので交わる点までは $t = t_0$ の値を満たす (2.8) のグラフ上の値をとる。よって時刻 t と高さ $y(t)$ の関係は $t_0 \leq t \leq 30$ で，$\underline{y(t) = \frac{-B-\sqrt{B^2-9g'C}}{9g'}}$ となる。

$y(t) = \frac{-B-\sqrt{B^2-9g'C}}{9g'}$ (ただし $t_0 \leq t \leq 30$) のグラフの概形は，下の図のようになる。

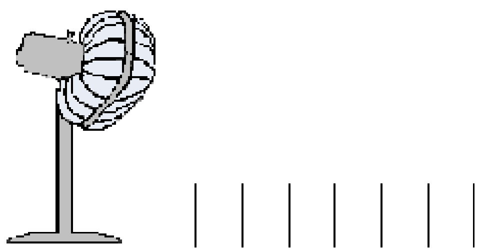


つまり，直線に近い曲線になる。t が 0 に近いとき，グラフが t 軸の下にあるのはまだ水が空中に浮かんでいる状態に対応する。実際のその部分での $y(t)$ の値は 0 である。

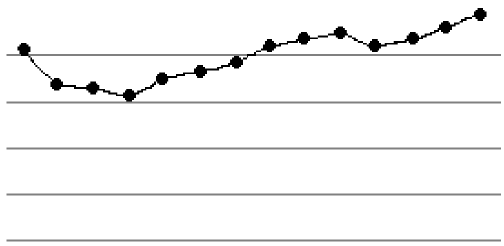
iv) 線香の燃え方

これは [2][3] で提案された問題を，改めて高校生用教材としたものである。[3] では，中学生が実験を行ってグラフにする実践が紹介されているが，以下の問題は，この実験結果を数理モデルによって再現することを扱った教材である。
必要な既習事項：2 次関数, 三角比, 指数関数

＜問題＞
下の図のようにお線香を何本か並べ，扇風機で 10 分間風を送る。10 分後のお線香の長さがどうなっているかを考える。

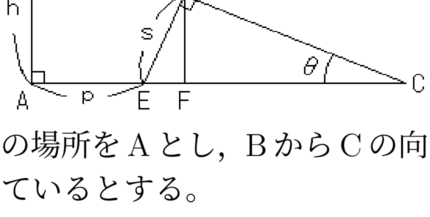


実験の結果，下のグラフのようになった。



グラフの左端に扇風機があり，右に行くに従って扇風機から遠ざかっている。この図から，扇風機より少し離れたところに一番風が強く当たっていることが分かる。この実験結果を，数式を用いて再現しよう。

＜解答＞



扇風機の場所を A とし，B から C の向きに風が吹いているとする。

△ABC より $\tan\theta = \frac{h}{\mathrm{CE}+p}$ なので

$$\mathrm{CE}= \frac{h}{\tan\theta} - p$$

△CED より $\sin\theta = \frac{s}{\mathrm{CE}}$ なので

$$s = \mathrm{CE}\sin\theta = h\cos\theta - p\sin\theta$$

また，△CED より $\cos\theta = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{CE}}$ なので

$$\mathrm{CD} = \mathrm{CE}\cos\theta = \frac{h}{\sin\theta} - h\sin\theta - p\cos\theta$$

△ABC より $\sin\theta = \frac{h}{\mathrm{CD}+r}$ なので

$$\begin{aligned} r\sin\theta &= h - \mathrm{CD}\sin\theta \\ &= h\sin^2\theta + p\sin\theta\cos\theta \end{aligned}$$

$$r = h\sin\theta + p\cos\theta$$

ゆえに $s = h\cos\theta - p\sin\theta$，$r = h\sin\theta + p\cos\theta$ となる。

風の強さは直進するに従って単調減少する。また，扇風機は自分の方を向いているときは風が当たるが，少しでも向きがそれたら風を感じなくなる。観測地での風の強さ $F(p)$ は r の関数 $f(r)$ と s の関数 $g(s)$ を用いて $F(p) = f(r)g(s)$ と表せると仮定する。ここで風の強さは直進するに従って単調減少であることから，$f(r) = 2^{-r}$ と仮定する。また，直進方向に垂直な向きに対して，風の強さは速く減衰するので，$g(s) = 2^{-s^2}$ と仮定する。

$$\begin{aligned} F(p) &= f(r)g(s) = 2^{-r}2^{-s^2} \\ &= 2^{-h\sin\theta - p\cos\theta - (h\cos\theta - p\sin\theta)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{指数}) &= -h\sin\theta - p\cos\theta - (h\cos\theta - p\sin\theta)^2 \\ &= -p^2\sin^2\theta + (2h\sin\theta - 1)p\cos\theta \\ &\qquad - h\sin\theta - h^2\cos^2\theta \\ &= -\sin^2\theta\left(p^2 - \frac{(2h\sin\theta-1)p\cos\theta}{\sin^2\theta}\right) \\ &\qquad - h\sin\theta - h^2\cos^2\theta \\ &= -\sin^2\theta\left(p - \frac{(2h\sin\theta-1)\cos\theta}{2\sin^2\theta}\right)^2 + \cdots \end{aligned}$$

よって $p = \frac{(2h\sin\theta-1)\cos\theta}{2\sin^2\theta}$ のとき指数は最大となるので，このとき風が一番強くなる。

$$\begin{aligned} p &= \frac{(2h\sin\theta-1)\cos\theta}{2\sin^2\theta} = \frac{h\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta} \\ &= \frac{h}{\tan\theta} - \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta} = \mathrm{AC} - \frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta} \end{aligned}$$

よって C 地点から $\frac{\cos\theta}{2\sin^2\theta}$ だけ A 地点よりのところで風が一番強い。この仮定した式は，実験結果にあった A 地点と C 地点の間において風が一番強いということを再現できている。

3. 授業実践の概要

平成 14 年 11 月 9 日,16 日に，高校 1 年生 13 人，2 年生 13 人，3 年生 3 人を対象に，高校数学セミナー (岐阜県教育委員会主催) の一環として実践を行った。生徒は学年にばらつきがあり，物理を履修しているとは限らないため，補助教員が必要と判断し，学生数名を補助として加えて授業を行った。授業の大まかな流れを説明する。

第 1 日目

午前：ベクトルや物理に関する簡単な講義，および演習（今回は学年のばらつきがあることや，理科の科目選択で物理を履修しているとは限らないことから，全員物理に関して簡単に学習を行った）

午後：問題演習「遅い球」

第 2 日目

午前：問題演習「水槽にたまる水」

午後：問題演習「線香の燃え方」(進度の速い生徒用に「遅い球の発展問題」を準備)

授業のねらいは先に述べたように，数学の有用性を感得すること，および数学への興味・関心を高めることである。現象をより厳密に考察する問題や，数理モデルの考え方を取り入れた問題，物理との関わりのある問題を解決する過程から，数学の現実社会との関連性や有用性に気付き，より数学に対して興味・関心を抱いてくれればと考える。

4. 結果とその考察

教材に対する生徒の反応と授業のねらいについて考察を行う。

<u>教材に対する生徒の反応</u>

i) 遅い球

事前の物理の学習からスムーズに問題に取り組むことができた。当初，問題が難しすぎるのではないかと懸念していたが，多くの生徒が積極的に取り組んでいた。しかし，多くの生徒は解答が不完全で，完解できる生徒は少数であった。その原因の一つとして，物理

に関する内容の指導不足，生徒の理解不足がある。今回は，上に述べたような混合授業であったことも要因の一つとなっている。生徒の理解度にもばらつきが生じ，物理未履修者にとっては困難であったと判断する。けれども，2年生，3年生の物理履修者と思われる生徒は，多少の困難を感じつつも，積極的に取り組んでいた。ただ，1年生にとってはとても困難な問題であったようだ。しかし，1年生も物理未履修者も，補助の学生の指導や全体での説明を通して，大半が解答を理解することができた。

ii) 遅い球の発展問題

この問題は，上の問題が早く終わってしまった生徒が数名いたことから準備をした。上の問題の発展問題ということで，とても難しい内容になっている。発展問題ということで，取り組む生徒は少数であった。

iii) 水槽にたまる水

この問題は遅い球の反省を生かし，少しずつ区切りながら演習を行った。生徒は学生の補助を受けつつも，問題を解決していった。問題は難しかったが，遅い球に比べ，理解度は高かった。

iv) 線香の燃え方

この問題は数理モデルによる再現を行うという，普段の数学の授業ではあまりない視点による問題である。そのため，生徒はとても興味を示していた。生徒にとって新しい考え方のため，考察の流れは教師が示していき，所々で登場する計算などを生徒の活動とした。生徒は特に，現象を表現するための式を選択する過程に強い関心を寄せていた。以下はその場面での教師と生徒のやり取りである。

(T：教師，S：生徒)

T「風の強さを数式を使って表現することを考えます。風が吹いているところから離れると弱くなっていくよね。x 軸をとって縦軸に風の強さを表すグラフを書くことにしよう。遠ざかると弱くなる。これを関数で表そうとしたらどんな関数があるだろう。遠ざかると値が小さくなる関数」

S「一次関数」

T「一次関数だと下がっていってどこかで負になってしまうね。こっち側から風が吹いているのに，下がっていくと反対側から風が吹いてくるってことは感じとして合わないよね。だから一次関数は不採用。」

S「反比例」

T「反比例もいまいちだね。どうしていまいちかというと，原点で無限大だよね。扇風機のそばにくっついても，無限大の風の強さってことないよね。今言っている二つの条件をクリアするような関数知ってるよね？」

S「指数」

T「指数だね。これだったら無限大ということはないね。下がっていくと弱くなる。だからこれにしよう。」

指数関数については1年生が未習であったため，簡単に説明を行った。難易度に関しては，最初の s，t を求める計算に予想以上の困難を感じていたようであったが，他はそれほど難しくなかったようである。

授業のねらいについて

先に述べたように，数学の有用性を感得すること，および数学への興味・関心を高めることが本授業のねらいであった。第2日目終了後に行ったアンケートから考察する。

数学の有用性について

今回の授業が数学の有用性を感じるのに影響したのか，という点について，アンケートの結果から分析する。次の質問を行った。

今回の数学セミナーを受講して，数学に対するイメージは変わりましたか。変わった場合，それはどのように変わりましたか。変わっていない場合，数学のイメージはどのようなものですか。

この質問に対し，以下のような回答を得た。
＜今まで持っていた数学のイメージ＞
・現実味がなく悪く言えば机上の空論 [1 年]
・計算式や公式を使うだけのつまらないもの [1 年]
・身近なものとは違う，独立したもの [2 年]
＜この授業を受けて感じた数学のイメージ＞
・応用することでいろいろな現象を式で表わせる [1 年]
・数学は想像以上に生活に密着した学問 [1 年]
・数学というものが身近な所にもたくさんある [2 年]

多くの生徒が上のような回答であった。この結果からは，生徒は数学に対してよいイメージを持っていなかったが，この授業を受けたことにより，数学と現実の事象との関わりや数学の有用性を感得していることがわかる。授業のねらいであった，数学の有用性について生徒は十分に感じ取ることができたといえる。

数学への興味・関心について

上の質問に対する解答の中には次のような意見も多くみられた。
・数学に親近感を感じたし，数学の奥の深さも感じることができた [1 年]
・今まではつまらないものだと思っていたけれど，応用することですこしおもしろくなった [1 年]
・これからの数学が楽しみになりました [1 年]
・今まで以上に数学をおもしろく感じることができました [1 年]

この結果からは，有用性を感じることにより，数学の学習意欲が向上していることや，ねらいであった数学への興味・関心が増していることがわかる。また，身近な現象を数理的に考察することが数学への興味・関心に影響したのではないかと思われる。

アンケートでは次のような質問も行った。

今回の数学セミナーでは，現実の問題を数学を用いて解決するということを行いました。今回のような問題解決と教科書などに載っている文章題との違いはあると思いますか。あればどのような点が違うと思いますか。

この質問に対し，以下のような回答を得た。
＜教科書の問題について＞
・「数学」を学ぶためにあるのでおもしろみがない [1 年]
・あまり身の回りで起きそうにもないことをやって実感もわかず，やる気がでないときもある [1 年]
・解くためにまず状況があるから，だいぶ無理な設定が多い [2 年]
・習ったことを使えばいい [3 年]
＜今回の問題について＞
・「現実」について解くので楽しんでやれたし，解けたときの喜びも大きかった [1 年]
・身近なことはやっていて楽しいし，できたときに感動するのでおもしろかった [1 年]
・まず状況があってそれを解いた。教科書の方がずっと解きやすいけど，やりがいは今回の方が段違い [2 年]

回答からは身近な現象を扱うことにより，興味を持って取り組めたこと，解けたときの達成感，満足感が高いことがわかる。このことから，扱う対象が身近な現象であるということは，数学への興味を増すための教材として十分な価値があるといえる。また，回答では教科書の問題が生徒にとって考えやすく解きやすい反面，おもしろみを感じにくいことが分かる。教科書のような問題は数学の学習にとって必要不可欠ではあるが，そのような問題に満足感を得ることができない生徒がいることも事実である。そのような生徒にとっても，身近な現象を数理的に考察するこの教材は，数学にさらなる興味を抱くきっかけとなっている。

最後にこの授業についての生徒の感想をいくつか挙げる。

・今までは数学はそんなに好きではなかったけれど，数学のおもしろさに触れることができてよかった [1 年]

・楽しかった。特に数理モデルの方が [1 年]

・普段に学校での数学の授業より，数学がおもしろく感じた [2 年]

・微積分などの手法を使わなくても解ける面白い問題があって，楽しめた [2 年]

・とてもよかった。数学が結構身近により感じた。問題も面白かった [2 年]

・数学についてのイメージが変わった [3 年]

5. 今後の課題

今回，授業後のアンケートでは「数学は身近にあるものだ」「数学に親近感を感じた」と，数学を身近に感じたという意見が多く見られた。また，数学に対し「おもしろくなった」「これからが楽しみになった」と書く生徒もいた。このことからも，今回の授業が生徒にとって十分に意味のあるものであったといえるだろう。しかし，今回は数学セミナーというさまざまな学年が混じった特殊な授業であった。今後は，本教材の各学年での取り扱いを検討し，授業案の作成及び実践を行いたいと考える。また，このような教材を中学校でどう取り入れることができるかという点も考えていきたい。

最後に，授業実践にあたり，多大なご協力をいただいた岐阜県教育委員会の皆様，及び参加してくださった高校生の皆様に心から感謝いたします。

引用文献

[1] 剣持信幸，越川浩明，1998，コンピュータ科学から数学教材を考える，千葉大学教育実践研究第 5 号，pp.77-86.

[2] 愛木豊彦，2001，算数・数学教材開発の今後の方向について，岐阜大学カリキュラム開発研究センター研究報告，Vol.21，No.2，pp.1-8.

[3] 近藤法和・井上春奈・愛木豊彦・山田雅博，2001，数理的な考え方を養う授業実践，2001 年度数学教育学会 秋季例会発表論文集，pp.151-153.