

モデリングの考え方を活用する授業のあり方についての一提案

近藤法和¹

数学の有用性を理解し、積極的に利用しようとする態度を育成するために、モデリングの考え方を活用する授業の実践を行った。身近にあるものの良さを数値化するために自分で数式を作ることを課題とした。授業の結果、中学生がこのように数値化することが可能であることがわかり、数学を問題解決のための一つ的手段として用いられるものであることを捉えさせることができた。本稿では、その授業実践の報告をする。

<キーワード> 数理モデル, モデリング, 数値化, 数学の有用性

1. 序論

数学嫌いな子どもたちの増加などの数学教育に関する諸問題の解決を目指し、子どもたちにとっても、また教える側にとっても新鮮でおもしろいと感じられるような算数・数学的な活動を取り入れた教材の開発を行ってきた。その理由は、近藤ほか [1] で述べたような、算数・数学的な活動を取り入れていくことの必要性からである。その中でも、数理モデルの考え方に注目し、数理モデルを活用する教材開発を行ってきた。これまでの実践については、近藤ほか [2]～[5] において述べている。数理モデルを活用することで、数学は役に立つものであるということが実感できるはずである。

本論文では、まず今回の教材開発を行うことになった背景を説明し、そして実践した結果を分析し、今後の課題について述べることにする。

2. 数理モデルについて

まず、数理モデルとはどのようなものなのかを簡単に述べる。

身の周りに実際の問題があるとする。それをどのように解決できるかを考え、試行錯誤するわけだが、簡単に解決できることもあれ

ば、考え方が難しくなりすぎたり、行き詰ったりして解決できなくなることもある。どのようにアプローチしてよいかわからない場合も少なくない。そのときの解決の1つの方法として、数学を用いることが考えられる。実際の問題のデータ、関係、条件を抽象化、一般化などして数学的問題を作って解決するのである。このように数式化してできたモデルを数理モデルと呼ぶ。そして数学の解を求め、得られた解を実際の問題に当てはめて解釈する。その解釈が実際の問題と一致しなければ、モデルの修正をしたり、新しいモデルを用いたりするなど、もう一度数式化する段階からやり直す。この過程をモデリングという。モデリングの手順を以下に簡単に示す。

1. 現実の世界の現象を数式を使って表す。
2. 数学的な解を求め、それを実際の場面に当てはめて検討する。
3. それが現象と合えば数学を使って現象を説明できたことになる。
4. 合わなければ初めの仮定を修正してもう一度検討する。
5. これを繰り返して、問題を解決していく。

数理モデルのよさとして、次の点が挙げら

¹岐阜大学大学院教育学研究科

れる。

- ・ 事実を簡潔に表現できる。
- ・ 因果関係を説明しやすい。
- ・ 一般化して理論をつくることができる。

さらに、数理モデルを算数・数学教育の中に取り入れていく利点として、次の点が挙げられる。

- ・ 数学と実世界との関連から好奇心を呼び起こし、自主的に学ぶ態度を身に付けることができる。
- ・ 数学の学習を促進するための動機付けができる。

数理モデル化プロセスの重要性は剣持・越川 [6] でも指摘されている。そのため、モデリングの過程を小中学生の段階から体験させることは非常に有益であるという立場から教材開発を行ってきた。

3. これまでの実践とのつながり

先に挙げたこれまでの実践のうち、近藤・井上・愛木 [4] について、簡単に述べる。

この授業は、発泡スチロールでいくつかのクーラーボックスを作り、それらの良さを比較する、というものである。クーラーボックスの良さは、単に内部の低さ温度だけでは決まらない。厚さ、大きさ、値段、温度など、様々な要素が絡み合って決まる。これら一つ一つの要素は数値化しやすいが、クーラーボックスという一つのものになったとき、これをどのように数値化することができるだろうか。単純に一つの要素だけで評価することはできない。近藤 [7] で述べられているように、「質量、長さ、時間などのような物理的な量は一般に数量化が容易であるが、品質の良さ、感覚的な感じ、心理的な印象の深さなどは、数値化するだけでも一つの研究課題になりうる」のである。クーラーボックスの良さも感覚的に評価してしまいがちであるが、感覚的に「こっちのクーラーボックスのほうが良さそうだ」ということがいえても、その根拠が明確では

ない。そこで数値化して比較をしようというわけである。

先の授業において、クーラーボックスの良さを数字で表すということをねらいの一つとしたが、温度を測定し、感覚的にどのクーラーボックスがよいかを決定するだけで終わってしまった。時間が足りなかったこと、中学生がそこまで考えることが難しかったことなどがその原因として挙げられる。そこで今回は、「いろいろな要素を考慮して、自分で評価する関数を作って比較する」ということに焦点を当てて授業を行う。

4. 教材開発にあたって

教材開発するときには、ただ単に数式を作るという活動が含まれるだけではなく、以下の点に注意した。

- ・ 子どもにとって身近な素材で、自然にどちらがいいかを比べてみたいという気持ちになるもの。
- ・ ある要素だけで単純に比べられるものではなく、いろいろな要素が絡み合っていてそれらを総合的に判断しないと良さを比べられないもの。

素材が身近であるということは、重要なことである。日常とかけ離れていれば、身近なところでも数学を使うことができるということが感じられず、そのため、数学が役に立つということを感じにくい。

そこで、子どもたちが数を用いる代表的な場面である買い物想定し、何を対象として用いればよいかを考察した。今回の素材としてはいくつか考えられた。その中で注目したのが使い捨てカイロである。通常は安いもののほうが得だと思いかもかもしれないが、大きさ、温度、持続時間などが違うため、単純に値段だけでは比較できないのである。また、実践の時期がちょうど寒くなる季節でもあり、子どもたちの興味・関心をひきやすい。以上により、使い捨てカイロを素材として選択した。

5. 授業の内容

5.1 授業計画

授業の計画を次に示す。

1 時間目 平成 14 年 11 月 29 日 (金) 中学 3 年生 17 名

	生徒の学習活動	指導者の指導・援助
導入	<p>カイロを提示する。 「店にいろんな種類のものが置いてあったら、何を基準にして選ぶか?」をたずねる。 (プリントに記入)</p> <ul style="list-style-type: none"> ● 安いもの。 ● 長持ちするもの。 ● なんでもいい。 <p>表を配布する。 二日間の授業の流れを把握する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> カイロの良さを表す公式を作ろう！ </div>	<p>自由な発想で、いろいろな項目を挙げさせる。</p> <p>表の見方を説明する。 二日間の授業の流れを説明する。</p> <p>課題を提示する。</p>
追究	<p>個人で追究する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ● 時間をそろえて考えたらどうか。 ● 単位面積あたりの値段はどうか。 ● 持続時間を重視して作ってみよう。 <p>まず、作ってみる。</p> <p>うまく表せていなければ修正をする。</p> <p>一日目の感想をプリントに書く。</p>	<p>机間指導を行う。 表にない項目も、必要なら自分で用いればよいことを助言する。</p> <p>まったく思い浮かばない生徒には、何を一番重視するか、どれがよさそうか、などをたずね、公式を作るヒントを与える。 式ができたら、実際に数字を代入するなどして本当にその式で比較できているか、よさを表現できているかを確認するよう助言する。</p>

2時間目 平成14年12月6日(金)

	生徒の学習活動	指導者の指導・援助
交流	5人程度のグループでお互いの意見を交流する。	あらかじめ、前回のグループ交流での考え方によってグループわけをしておく。 誰もが考えをきちんと話せているか、グループでの話し合いがうまくできているかを確認する。
発表	グループごとに出した結論を発表し、全体で交流する。 二日間の授業の感想をプリントに書く。	各グループの結論の価値付けをする。

今回も、モデリングの過程を感得できるような授業を行う。自分でまず関数を作ってみて、実際に数字を当てはめるなどして、本当にその式で良さが表されているかを検討する。うまく表されていない場合は修正する。この過程そのものが、モデリングの考え方である。次に、授業の大まかな流れを示す。

1. 「何種類ものカイロが店にあったら何を基準にして買うものを決めるか」を問う。
2. 用意した6種類のカイロの特徴を比較した表(表1)を配布する。
3. 表をもとに、数式を作って良さの比較をする。

4. 一度作った式の妥当性を判断し、必要に応じて修正を加える。

5. あらかじめ作った式によってグループわけをしておき、グループごとに意見交流をする。

6. 作った式を検討し、最後にグループとしての結論を出す。

7. グループごとに発表をする。

1から4までを1時間目に、5から7までを2時間目に行う。

なお、生徒に配布した表は次の表1のようなものである。

種類	単価 (円)	大きさ (×)	持続時間 (時間)	最高温度 (度)	平均温度 (度)
A	32.8	13.5 × 10	24	65	51
B	37.8	13.5 × 10	24	65	51
C	17.8	13.2 × 10	20	66	52
D	16.7	13.2 × 10	18	65	52
E	29.8	13.5 × 10	20	68	54
F	17.8	13.5 × 10	20	68	54

表1

5.2 授業のねらい

ねらいは、数学は役に立つものであるということを実感させること、事象を数理的に処理できるようにすることである。現実世界の現象を数学的に解決することによって、数学の有用性を理解させることができるし、数学を積極的に活用しようとする態度を養うことができるはずである。

また、先に述べた授業では数値化することまでできなかったため、中学生がこのように身近な事象を数学的にとらえ、自分で式を作ることが可能であるか、自分で作った式の妥当性を検討し、適当に修正することが可能であるか、ということ进行调查することが、授業の目的である。

5.3 グループ交流の形式について

2時間目の授業ではグループ交流を行うわけだが、これは、1時間目に各自が作った式を検討し、さらに考えを深めることを目的として行う。生徒が作った式により、いくつかのグループに分けるわけだが、考え方のよく似た生徒、よく似た式を作った生徒を1つのグループにする。すなわち、興味・関心によってグループ分けをするのである。

そのグループ交流は、次のような形式を用いて行う。

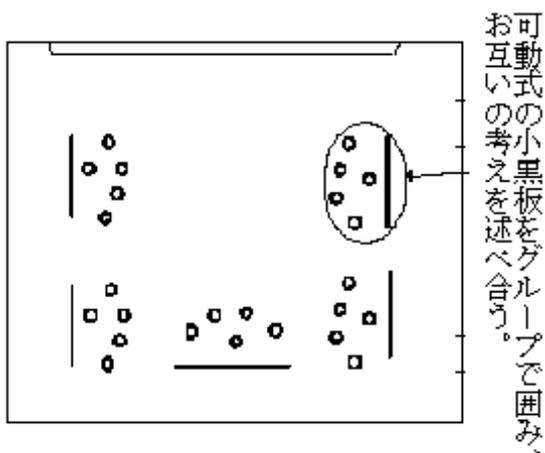


図2

図2のように可動式の小黒板（またはホワイトボード）をグループに一つずつ用意し、それを使って5人程度のグループの中でお互いの考えを述べ合う。この利点は、誰もが自分の考えを話すことができることにある。また、人の意見を聞くことができる。そのため、よいところは吸収することができるし、自分の考えを深まっていく。また、グループ分けの仕方による利点もある。分け方は能力別、興味・関心、ランダムとあるが、興味・関心で分けることにより、お互いの式を検討しあい、修正しながらより良い式を作ることができる。小黒板を自由に動かすことができるのも、利点である。全体交流をするときには、そのまま前まで移動させて、他のグループの子どもたちにも話をするのであり、このような形式でグループ交流を行う。

さらに今回は、日めくり方式にする。小黒板に考えを書いていくと、書くスペースがなくなれば消すことになる。それでは残らないものもある。そこで日めくり方式を用いる。日めくり方式とは、カレンダーのように何枚か紙を綴ったものに考えを書きながら説明していくものである。いっぱいになれば紙を一枚めくればよい。そのため、考えた道筋を記録することができる。これにより、教師は子どもたちがどのように考えたかをしっかり把握することができるし、子どもたちにとっても、初めは考えがはっきりしていなくても、自分の考えを話したり、人の意見を聞いたりしながら、考えをまとめていくことができる。最後に発表をするときにも、そのまま使うことができる。これは、一種のポートフォリオともいえる。問題解決の過程がきちんと記録として残るため、教師と生徒の双方にとって有効だろう。

6. 結果とその分析

6.1 1時間目の結果分析

まず初めに、「何種類ものカイロが店にあっ

たら何を基準にして買うものを決めるか」を尋ね、プリントに記入させた。実際に買い物をするときどんなところに目が行くか、何を選ぶ基準とするかを問い、考えさせることにより、問題意識を持たせるためである。得られた回答（複数回答）は次の通りである。

- 値段（17人）
- 大きさ（16人）
- 機能（12人）
- 持続時間（9人）
- 知名度（9人）
- 見た目（9人）
- 温度（3人）
- CM・広告（3人）
- 温くなるまでの時間（2人）
- 使用期限（2人）
- 使いやすさ（2人）

17人全員が回答したように、「値段」は重要な要素のようである。値段のほか、大きさ、温度といったものは数値にしやすいものであるし、既に数値で表されている（表1に示した）。しかし、機能、知名度、見た目といったものは、多くの生徒が買うときに考慮すると考えてはいるが、それらは数値にしにくいものである。

そこで、カイロ比較表（表1）を配布し、課題を提示し、これらを数値にして比較するように指示した。表をもとにカイロを比較する式を作るわけだが、

- 表にあるものだけしか用いていけないのではなく、自分が重要だと考える要素も、数値にする基準を作って用いればよいこと。

- 表にあるものをすべて使う必要はなく、自分が重要でないと思えば無視してもよいこと。

の二点を注意した。

次に、個人追究によって生徒が作った式のうち、主なものを紹介する。

$$(\text{単価}) + (\text{大きさ}) + (\text{持続時間}) + (\text{平均温度}) + (\text{機能})$$

表の数値をそのまま使うのではなく、各項目の1位から6位を順に6点、5点...1点として各項目の順位点をつけ、それを加えていく。ただし、最高温度は必要ないとして無視する。また、それぞれのカイロにどんな機能があるかを考え、それも数値化する。

$$\frac{(\text{単価})}{(\text{持続時間})}$$

1時間あたりいくらかかるかで式を作った。「大きさ、最高温度、平均温度にはそんなに差がない」、「この二つのことはカイロを買うときに一番重要になる」という理由から、他の要素は無視した。この値は小さいほうが良い。

$$\frac{(\text{大きさ}) \times (\text{持続時間}) - 10| \text{最高温度} - 66| + 100(\text{平均温度})}{(\text{単価})}$$

まず分子に注目したい。最高温度は高すぎてもいけないことに気付き、絶対値記号を使って表した。自分で66度が適温であると決めたわけである。 $| \text{最高温度} - 66 |$ の値は小さいほうがいいので、10倍して $(\text{大きさ}) \times (\text{持続時間})$ から引くことにした。また、平均温度は100倍して加えた。重要度が高いと考えたためだろう。そしてそれを単価で割った。

$$(40 - \text{単価}) + (\text{大きさ}) + (\text{持続時間}) + (\text{平均温度})$$

40円を基準に、それよりいくら安いかを考えた。単価は数値が小さいほうが良く、他の要素は数値が大きいほうが良いので比べにくいからだろう。そして自分が必要だと考えた、大きさ、持続時間、平均温度を加えていった。さらに、単価を a 、大きさを b というように文字において、式を簡略化していた。

生徒の感想を以下に示す。

- カイロの良さを公式で表せば、カイロのよさに順序をつけられるというのが面白かったです。
- 公式を作るうえで、ポイントが高いほうがいいのか、低いほうがいいのかにそろえなければいけないというのが注意すべき点だと思いました。
- ありもしないことでの数学の公式作りということに最初びっくりしたが、実際やってみて、いろんなところに数学が出てきて、かなりびっくりした。
- 自分で物の価値の公式を決められるのは、おもしろかった。
- 公式を考えるのはおもしろいです。自由に式に代入して数値を出してみると、いろいろなことがわかりました。
- 自分の価値基準を数値化してみるというのは面白かった。
- 公式を作るのは難しかったです。

物の良さを比較するために数値にして表すことは、中学生でも十分可能のようである。人によって重要視する要素が違ふし、そのため比較のしかたも違ふ。作った式も人それぞれである。自分の価値観によって自分だけの公式が作れるところに、この教材のおもしろさがある。多くの生徒たちが、自分で好きな

ように公式を作ることができる点におもしろさを感じていた。数値にすることでいろいろなことがわかってくるという生徒もいた。意外な数学の使い方を知り、数学は身近なところでも使えるということを感じたのではないだろうか。また、「作った式の妥当性を判断し、修正する」という過程を体験させることもねらいの一つであったが、式を作って数値を代入し、自分の思った通りにならなければ修正するという姿も見られた。ただ、最後はやや時間も足りなくなり、数値を代入して確かめるところまでいかなかった生徒や、自分の考えがしっかり持てなかった生徒もいる。そのため、次回のグループ交流ではお互いの意見を交流しあうことで、考えをしっかりとせ、広げられるようにしたい。さらに、作った式を吟味させられるようにしたい。

6.2 2時間目の結果分析

1時間目の結果をもとにグループ分けをして授業を行った。グループ分けの意図についてまず述べる。

1班(6人)

このグループは、 のように順位点によって式を作ったグループである。単純に順番をつけて点数を加えているだけでなく、見た目などを考慮した式もあり、交流でさらに考慮する要素はないかや、見た目などは主観が入ってしまうので、それらを数値化する基準をどのようにすればいいかなど、深めさせたい。

2班(3人)

このグループは、 のように時間で割ったグループである。1時間あたりにいくらかかるかなので、数値が小さいほうがよいということになる。考慮している要素が少ないので、他の要素も重要であれば考慮するように促し、さらに深めさせたい。

3班(4人)

このグループは、 のように単価で割ったグループである。1円あたりの良さで比較した。数値が大きいほうがよいということにな

る。また、持続時間や温度を重要視しているのが目立ち、さらには絶対値記号を用いて作った式もあるので、そのような良さが生かせるように指導し、さらに発展させたい。

4班(4人)

単価は数値が小さいほうがよいが、それ以外は数値が大きいほうがよいので、比べにくい。そこで、基準となる数値を自分で決めて、その値から単価を引いたものを値として用いて式を作ったグループである。例えば のようなものである。特徴的なので、2時間目でもこのような考え方を生かして公式作りをさせたい。また、自分たちで決めた数値が基準値として妥当であるか、ということも検討させたい。

次にグループ交流の様子について報告する。

1班

このグループは順位点によって比較をしたグループである。6種類のカイロのそれぞれの要素を順位によって1点から6点までの点数をつけるのである。そしてこの時間は、さらに考慮する要素はないかや、主観が入ってしまうものを数量化する基準をどのようにすればいいかなどを議論した。前の時間に作った式を検討しながら、「単純に長持ちするものや平均温度が高いたけで良いとは言えない」「値段を重視したい」といった理由で、持続時間や平均温度を単価で割ることにした。24時間持つ二つのカイロは長持ちするといってもコストがかかるのである。そこで1円あたり持続する時間、1円あたりの温かさを求め、それらの順位で点をつけることにしたわけである。

また、主観が入りやすい機能については、開けるだけで温まるものを2点、もんで温まるものを1点、マイナスイオンを3点などの基準を作った。そして最終的に得られた結論は次のようなものである。

$$(\text{単価}) + \frac{(\text{持続時間})}{(\text{単価})} + \frac{(\text{平均温度})}{(\text{単価})} + (\text{機能}) + (\text{名称}) + (\text{注意事項の数})$$

各要素には表1の数値を代入するのではなく、すべて順位点を代入する。順位に応じて1点から6点をつけ、その点数を足していく。このような比較の仕方はこちらが意図したものではなかった。他と比較してどうかという相対的な良さではなく、カイロそのものを数値にするという絶対的な良さを表す公式を作らせたかったが、数値化しにくいものをどの程度数値化できるかを見極めることも、今回の研究目的の一つだったので、自分たちの基準を作って、機能を数値化できたことは評価できる。

2班

このグループは、持続時間で割って1時間あたりの良さで比較したグループである。作った式に何度も代入しながら作った式を検討し、結果として次のような式を作った。

$$(\text{単価}) \div (\text{持続時間}) \div (\text{大きさ})$$

単価を持続時間で割り、さらにそれを大きさを割り、1時間 1cm^2 あたり温めるのにいくらかかるかを求めたわけである。考慮している要素は少ないが、「大きさ、最高温度、平均温度には差がない」「温度は個人の好みのもので単純に温めることだけを考える」といった理由からである。必ずしもすべての要素を含めた式を作る必要はなく、自分が重要視したことを考慮すればよいのである。

近藤[7]が述べているようにモデリングするときには、「現象に関係する根本的な要素のみを取り上げ、重要でないものは捨てる」ことが大切である。自分にとって必要なものとそうでないものをきちんと区別し、簡潔な式で表したところが、工夫をした点である。式の意味も考え、「1時間 1cm^2 あたためる単価」と説明している。

3班

このグループは当初、単価で割って1円あたりの良さを比較する式を作っていたが、話し合いの結果、持続時間で割ることにし、

のように絶対値記号を使った式を作ることにした。

自分たちで適温を52度に設定し、その値にどれだけ近いかが良さの一つであると考え、絶対値記号を使ってその良さを表した。温度は高ければ高いほど良いというわけではないからである。必然的にこれは値が小さいほうが良いということになるため、持続時間で割ることにしたのも、式全体が値が小さいもののほうが良いということになるようにするためである。そして何度も検討し、修正しなおし、結論として最後にできた式は次のようなものである。

$$| \text{平均温度} - 52 | + 100 \times \frac{(\text{単価})}{(\text{持続時間})}$$

|平均温度 - 52| の値に $100 \times \frac{(\text{単価})}{(\text{持続時間})}$ を加えることにしたわけだが、100倍したのも工夫した点で、 $\frac{(\text{単価})}{(\text{持続時間})}$ を計算するとかなり値が小さいので、平均温度のウェイトが大きくなりすぎるために100倍したのだろう。

4班

このグループは、基準となる数値を自分で決めて基準値との差を値として用いる、という考え方で式を作った。まず、自分たちが重要だと思うものを挙げ、それらを順に加えていくことにした。また、平均温度は52度が適温として絶対値を使って表すこと、単価は100円を基準にしていくら安いかを考えること、を決めた。作った式は次の通りである。

$$(100 - \text{単価}) + (\text{大きさ}) + (\text{持続時間}) \times (\text{基準値} - |52 - \text{平均温度}|)$$

このグループの式の良さは、自分たちで基準となる値を決めたことにある。単価は値が小さいほうが良いが、(100 - 単価)の値は大きいほうが良い。結果として式全体も値が大きいほうが良いということになるので、式を作りやすくなる。(基準値 - |52 - 平均温度|) についても同様に、|52 - 平均温度| だけだと値が小さいほうが良いことになってしまうの

で、基準値から引くことにしたわけである。基準値としてどれほどの値が適当かを繰り返し検討していた。最終的に基準値を決めるまで至らなかったが、このような考え方はすばらしい。

次にグループ交流について述べる。グループ交流では、どの生徒も自分の考えが話せており、きちんと話し合いができていた。しかし、グループ交流の方式として、ホワイトボードを利用したディスカッションを行うことは先に述べたが、この方式はあまりうまく活用できなかった。グループごとにかたまって、机の上でプリントを用いて式を検討したり、代入して計算をしたりしていた。日めくり方式も、1枚目に式を書いて考えを説明した程度で、あまりうまく活用されなかった。ホワイトボードおよび日めくりをどのように使えばよいかわからなかったり、このような方式にあまり慣れていなかったりしたことが原因だろう。机を囲んだほうが話し合いがしやすかったためかもしれない。ホワイトボードを利用したディスカッションについて、どのようにうまく活用していけばよいか、どのようにすればさらに有効なものにできるか等、今後検討していく必要がある。

また、グループごとに結論を出した後、お互いの考えを発表しあう予定だったが、時間がなくなったため、授業者が各グループの結論を紹介した。他の考え方を知ってそのような考え方もできるのかと、考えが深まったのではないだろうか。

式を作るのはわりと容易なことだったが、その考え方を交流し、式を検討するのに時間がかかった。発表しあうところまでいけなかったのは残念だったが、式の妥当性を判断するというはこの授業のねらいの一つでもあったため、その過程にじっくり時間をかけることができたのは良かった。

最後に、この授業を終えての生徒たちの感想を紹介する。

- 頭がわれそうに考えました。でも式ができてよかったです。これからも数学が身近にあることを感じていこうと思います。
- 自分達で身近な物の公式を作り比較するというのは初めてだったので、楽しんで授業を受けられました。
- 物の価値を公式化するのはおもしろかったけど、個人的には自分の感覚でいいものをきめる方が正確だと思った。
- 最初はカイ口の良さを公式で表すと聞いて驚いたけれど、だんだん公式をつくっているうちにおもしろくなった。けれど数字で表すといってもどうしても自分の好みが入ってしまい、公正に良さを比較できたかという疑問だ。
- 自分なりの式を考えて比較するとき、様々な式が考えられ、他人の式の考え方を知ることがおもしろかった。自分たちが使った項目は今回あげられていたものの中の2つ3つだったので、もっと多くの式が考えられそうだった。
- 自分なりに式を作ることができた。身の周りにある物を、数字を使うことでほぼ正確な比較ができると思った。
- このような数学は初めてやりました。とてもおもしろかったです。
- とても楽しかった。みんなそれぞれ別の考え方があっておもしろい発想だった。また、こんなものも数学で表せるのだなと実感した。
- 今回のものは具体的な単元ではないけれど、数学をより生活に密着したものと考えられるようになった。

先にも述べたように、近藤 [7] は「質量、長さ、時間などのような物理的な量は一般に数量化が容易であるが、品質の良さ、感覚的な感じ、心理的な印象の深さなどは、数量化するだけでも一つの研究課題になりうる」と述べている。今回、中学生が数量化しにくいものを数量化することがどれだけ可能であるか、また、数量化することが可能ならばどのような方法で数量化するか、を見極めることを研究目的の一つとした。各グループの結果から、中学生が数量化しにくい「品質の良さ」を数量化することが十分可能であることがわかった。

自分なりに重視する必要があるものとそうでないものをきちんと見極めたり、自分の中の重要度の比率を決めたりして、公式を作ることができていた。どんなものか、数値が大きいほうがいいのか小さいほうがいいのか、も的確に判断できていた。さらには、絶対値を使ったり、(基準値 - 製品の数値)といった考え方で式を作る生徒もいた。生徒の感想からも、いろいろな式が考えられたこと、数学を使って比較ができたこと等、おもしろいと感じたことがわかる。

また、モデリングの過程を体験させることも今回の授業の目的の一つであった。自分でまず関数を作ってみて、実際に数字を当てはめるなどして、本当にその式で良さが表されているかを検討し、うまく表されていないければ修正するわけだが、一度作った式に数値を代入し、何度も計算し、修正をしている姿が見られた。そして自分の理想とする式に近づけていった。このように、モデリングの過程を体験させることができたのではないだろうか。

6.3 アンケート調査の分析

授業の最後に、次の2項目を生徒たちに尋ねた。

1. 数学と日常生活との関わりについて、どう考えていますか。

2. 物の良さを数字で表すことは、これまであまりなかったと思います。このような比較の仕方の良さは何だと思いませんか。

1は、ねらいの一つである、「数学の有用性を理解させる」に関わってである。あまり役に立たないと考えている生徒がいたかもしれないが、この授業を通して数学はいろいろな場面で使えるということがわかったかもしれない。この質問は、今回の授業が数学の有用性を感得させるために意義があったかを把握するためのものである。主な回答は次の通りである。

- 日常生活にも深い関係があり、使い方によって、いろいろな事ができる。
- すごい関係があると思う。
- 日頃は身近に数学との関わりを感じることは少ないけれど、見えないところに確実に関わっていると思う。
- あまり意識していないが、数学は日常の一部だと思った。
- 数学は日常生活によく使われている。(特に買い物をするとき)
- 日常生活のほとんどを数値化することができる。
- 数学は日常生活にかかせないものである。すべてのものは数学で動かされているといってもいいくらいだ。

数学と日常生活との関わりについて、肯定的な意見が多かった。かなり多くの生徒が関わりが深いと考えていることがわかる。

数学は身の周りで広く使われており、また、利用できる場面も様々である。子どもたちが数学は役に立つものであるということをさらに実感でき、自ら活用しようとする態度を養っていくためにも、今後も身近なところから素

材を探し、日常と関連付けた教材を実践していく必要があるだろう。

2は、今回の教材そのものについての意見を聞くためのものである。普段はあまり数値に表したりしないものの数値化をしたわけだが、このようにして比較することについてどんなふうに思ったか、このような比較の仕方の良さを感じたか、ということ把握するための質問である。主な回答は次の通りである。

- ばくぜんと考えるとどちらにしようかと悩むことも多いが、数字で表すと悩まずに決められることが多い。
- 数値に変換できて優れつを比べられる。
- にたようなものの違いがはっきりと表せる。
- 何かを区別するとき、絶対的に分けられる。
- 数字に表すことで正確な比較ができる。
- 数字に表すことによって、あいまいな点を明確にし、比較がしやすくなる。
- 数字の大きさを比較できること。優劣がつけやすい。

近藤 [7] も述べているように、このように数値化して比較する方法の良さとして、次の点が挙げられる。

- 数学的記述には、あいまいなところがないこと。
- 数式による表現は、文章による表現よりも簡潔であり、客観的でもあること。
- 抽象化された表現形式であること。

アンケート調査の結果からもわかるように、これらの良さを感じさせることができたろう。式を作って数値化すれば、はっきりとわかることもあるし、簡潔であり、客観的なのである。

比較の方法は様々で、必ずしも数学を用いて比較する必要はない。しかし、どのような方法でアプローチしてよいかわからないとき、数学は問題解決をするための一つの手段となりえるのである。生徒たちもそれを感じただろう。

7. 先行研究

今回の実践によく似た実践がなされているので、ここでその実践事例を紹介しておく。これは、「オリジナルな体格指数づくり」という内容のものである(大澤[8])。ある生徒は、次のような式を作ったという。

$$(\text{胸囲})^2 \times (\text{身長})$$

これは、人間の体をモデル化し、円柱と見立てて、円柱の体積を適用したのだという。「半径、高さをそれぞれ人間の胸囲、身長に見立てた柔軟な見方である」と大澤は述べている。このような抽象的な見方をするができるのも、数理モデルのよさであるといえるだろう。そして最後に、「生徒らは数学を道具に知的な好奇心を保持しつつ、現実的な問題を数学の土俵に上げ解決を図っている。まさに数学の現実的な価値・有用性を実体験しているのである。」とまとめている。このようなモデリングの考え方を活用する教材は、子どもたちに数学の有用性を感得させるための手立ての一つになるため、今後も引き続きこのような教材を開発し、実践していくと有効だろう。ただし、扱う題材についてはよく考慮する必要がある。

8. 今後の課題

今回の教材は、子どもたちに数学は役に立つものであるということを伝えるのに、十分

なものであった。子どもたちはとても意欲的に取り組み、自分なりの公式を考えていた。この授業の意図を理解し、数値化することは難しいが、数値化ができれば比較しやすくなるということを感じただろう。今後、さらに数学の有用性を感じさせていくために、次の点を課題として挙げたい。

- モデリングの考え方を活用する授業を一つの単元として位置づけ、長期的な計画で授業を行っていくこと。

授業時数の不足等の問題もあるため、実現可能でないかもしれないが、一つの単元としてこのような授業を行っていきたい。1時間や2時間ではなかなか数学の有用性を感じさせたり、おもしろさを感じさせたりすることは難しい。そこで、長期的な計画のもと授業を実践したい。

今回は、先に述べたクーラーボックスの授業の最後の場面である、「品質の良さの数値化による比較」という部分だけに焦点を当てた授業を行った。この授業で、中学生が自分の価値基準により式を作ることが十分可能であることがわかったので、今後は、最初に自分で実験の計画を立て、そして実験をし、改良を重ね、最後に品質の良さを評価する、という授業を行いたい。このような授業の中で、次第に数学の有用性を理解していこう。そのためにも、このような内容を一つの単元として位置づける必要がある。

- 他の比較方法との違いを確かめさせてみること。

数学を用いる前に、例えば文章で品質の良さを比較させてみたらどうだろうか。文章ではあまりうまく表現できないだろう。その上、根拠も明確ではない。

数式による表現の良さは前述の通り、「簡潔であり、客観的である」ことにある。文章による表現との違いを確かめさせることで、こ

の数式による表現の良さをさらに実感できるはずである。それはつまり、数学の有用性を実感することにつながるのである。

- コンピュータを活用すること。

今後、コンピュータの重要性がさらに増してくることも考慮して、授業にコンピュータを取り入れることも検討したい。

数理モデルにおいてコンピュータを用いることにより、観察する、探求する、仮説を検証する、思考する、シミュレートする、といったことができる。

今回の授業においては、変数がいくつも考えられ、場合によっては式が複雑になってしまうこともある。そこでこれらをコンピュータで処理したい。効率的になるだけでなく、コンピュータで作った式のグラフを描くことができれば、それを読み取ることで考察する力も身に付くだろう。この教材も、さらに意義のあるものになるはずである。

これらの課題を踏まえて、今後もモデリングの考え方を活用する教材の開発を行っていき、子どもたちに数学はおもしろいものであるし、大変役に立つものであるということを伝えていきたい。

最後に、今回の実践にあたり多大な御協力をいただきました千葉大学教育学部附属中学校の皆様にも、深く感謝いたします。

参考文献

- [1] 近藤法和・林英里奈・愛木豊彦, 2003, 現職教員の算数教育に対する意識調査, 岐阜数学教育研究, vol.1, pp.11-13.
- [2] 近藤法和・井上春奈・愛木豊彦・山田雅博, 2001, 数理的な考え方を養う授業実践, 2001年度数学教育学会秋季例会発表論文集, pp.151-153.
- [3] 井上春奈・近藤法和・愛木豊彦・山田雅博, 2001, 情報機器を活用した小学校での授業実践, 2001年度数学教育学会秋季例会発表論文集, pp.154-156.
- [4] 近藤法和・井上春奈・愛木豊彦, 2002, 実験を中心とする「総合的な学習の時間」教材の提案, 2002年度数学教育学会春季年会発表論文集, pp.1-3.
- [5] 井上春奈・近藤法和・愛木豊彦, 2002, 数理モデルを構成する授業実践, 2002年度数学教育学会春季年会発表論文集, pp.4-6.
- [6] 剣持信幸・越川浩明, 1998, コンピュータ科学から数学教材を考える, 千葉大学教育実践研究, 第5号, pp.77-86.
- [7] 近藤次郎, 1973, 社会科学のための数学入門 - 数学モデルの作り方 -, 東洋経済新報社.
- [8] 大澤弘典, 1999, 肥満とやせの判定基準づくり, 日本数学教育学会誌, 第81巻第11号 pp.5-9.