岐阜数学教育研究
2002, Vol.1, 31-40

数学的な見方や考え方を高める教材開発とその実践
～和算の教材化と実践～

山路健祐[1], 山田雅博[2]

子供が算数・数学を主体的に学んでいくためには，数学的な見方・考え方を高めていく事が重要であると考える。本研究では，そのような見方・考え方を高めていくために，発展的な学習の中で，このような見方・考え方に重点を置き，授業実践を行った。扱う教材として，和算を用いた。これは，ねらいを達成させるための原動力となる関心・意欲を高めるためである。

＜キーワード＞数学的な見方・考え方， 和算

1. はじめに

算数数学を学ぶ中で，算数数学に主体的に取り組み，自ら追求していくという姿勢は大切である。この主体的に学ぶ姿勢の育成のためには，算数数学をどのように追求していくのかという追求の仕方を経験することが大切である。

追求の過程では，数学的な見方や考え方が重要となる。この数学的な見方や考え方は，事象を自らの頭の中で整理し，予想を立てながら考え，事象のどのような点に注目し，どうとらえ解決に近づけていくのか，という問題追求の経験の中で養われ，高まっていくと考える。

本研究では，この数学的な見方や考え方を養うことのできる教材開発を行い，発展的な学習教材として提案する。塵劫記にある油分け算をもとに容器を操作し，水を移動させることによってつくられる水の量を考える。これは，倍数や約数の考え方を用いて解決される。倍数や約数は小学校6年の「数や図形の見方」の単元で学習する。本教材をその後の発展的学習の時間に取り扱う教材として提案する。本教材は，どのように倍数や約数に帰着させていくかという追求の過程において，わかりやすく表現し，類推していく力を高めるための教材として有用であると考える。

2. 数学的な見方考え方を高める

先に示した数学的な見方や考え方を深めていくには，次のような力を育てていくことが重要であると考える。

わかりやすく表現し，処理する力
いくつかの結果から類推していく力
既習の内容に帰着させていく力

の力とは，わかりやすく表現するために，まず，自分の中で事象を整理できること。そして，整理したことをわかりやすく伝えたり，表したりするために，表現の手段を目的に応じて自分で選択できることである。

の力とは，事象の考察より，どのようなことがいえそうかと，予想を立てて考えていけることである。また，いくつかの結果から，規則性を見出し，一般化していけることである。

の力とは，事象の考察の中で既習の内容を見出し，必要に応じそれを用いて問題を解決していけることである。

以上の3つの力に着目し，これらを育てる

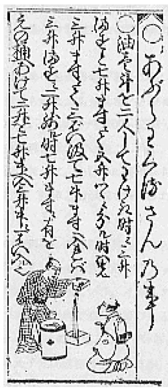
[1]岐阜大学大学院教育学研究科
[2]岐阜大学教育学部

ための教材を開発することが本研究の目的である。今回，対象を小学校第 6 学年として実践を行い，考察していく。

3. 教材設定の理由について

本時の学習では，江戸時代の算術書『塵劫記』の中から「油分け算」を扱う。『塵劫記』は，吉田光由による数学書で，初版は 1627 年（寛永 4 年）に出ている。

『塵劫記』にある「油分け算」は次のような問題である。



(油わけ算 [4]p.29)

斗缶に油が 1 斗ある。7 升枡と 3 升枡がある。この枡を使って油を 5 升ずつに分けたい。どうしたらよいか。[1]

本時の授業ではこれをアレンジして取り扱う。単位を「斗，升」から「l，dl」に直し，2 つの容器を用いて様々な量をつくる。事象の考察の中で，自分の考えた過程を言葉や図，表，グラフ，式，などで表すことによって考えた筋道を明らかにし，的確に表現できる力の育成をねらっている。また，問題に取り組む中で，そこに潜む規則性を予想し，見つけていくという作業が必要になってくる。そして，問題を考察していく中で既習の内容に帰着できることに気付かせたい。『塵劫記』の内容を扱うもう 1 つの理由として，数学の歴史の深さとそこに取り上げられている問題の面白さを味わうこともあげられる。

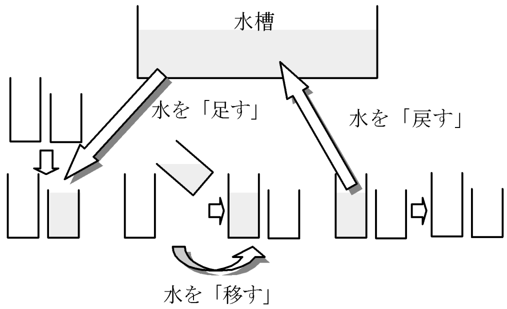
4. 教材についての分析

塵劫記の油分け算をもとに，次の問題を考え，考察していく。

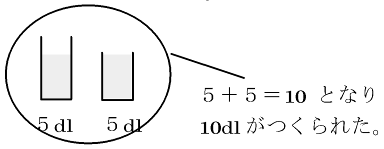
「7dl の容器と 5dl の容器を用いてつくられる量について考える。」

(1) 操作の仕方とつくられる量

操作の仕方について説明する。たくさんの水が入った大きな水槽があるとする。そこから容器に水を「足す」という操作，容器から容器へ水を「移す」という操作，容器に入っている水を水槽に「戻す」という操作，以上の 3 つの操作を考える。ここでは，これらの 3 つの操作の 1 つ 1 つを「1 回の操作」と見る。それぞれの操作を図で表すと次のようになる。



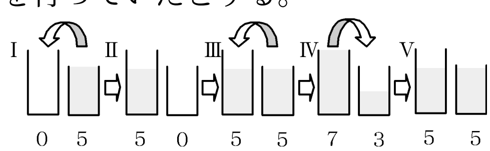
次に，つくられる量について説明する。つくられる量を容器の両方に入っている水を足したときの量とする。下の図の場合，つくられる量は 10dl となる。



(2) 効率のよい操作

どのような操作を行っていけば，目的とする量まで効率よくたどり着けるか考える。

目的とする量をつくる過程で，次のような操作を行っていたとする。



I は 5dl の容器に水を足した状態を表し，I → II では，5dl の容器から 7dl の容器に水を移している。II → III で 5dl の容器に水を足し，III → IV で 5dl の容器から 7dl の容器に水を移している。次に，IV → V で 5dl の容器から 7dl の容器に水を移している。

しかし，最後のＶの状態は結局，III の状態に戻っただけである。これは効率がよいとはいえない。つまり，効率のよい操作とは，操作の過程が重複することなく，目的の量までたどりつくことである。

効率のよい操作について，次のように整理する。

(i) 7dl の容器から 5dl の容器に水を移す操作と，5dl の容器から 7dl の容器に水を移す操作が混在していると遠回りになる。
(ii) どちらか一方の容器を，空になれば水を「足し」，水が入っていれば「移す」操作を行う容器とする。また，もう一方の容器は，水を「移され」，いっぱいになれば水槽に水を「戻す」容器とする。

(3) 容器の容量とつくられる量との関係

(i)，(ii) のことから，２つの容器にそれぞれ条件を付け，つくられる量について考えていく。

〔5dl の容器〕

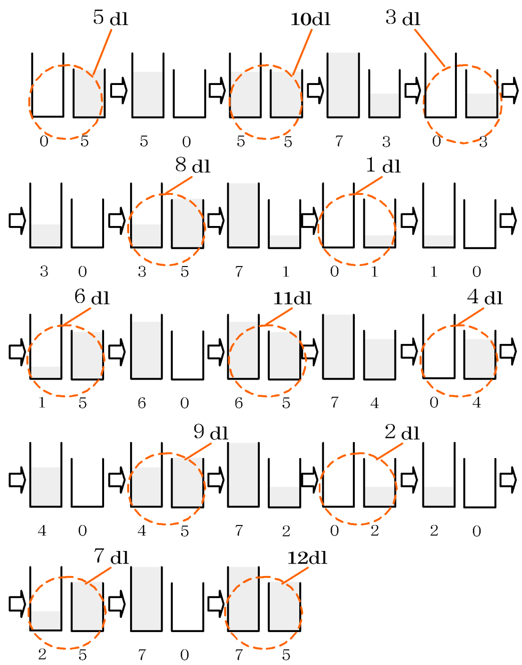
空になれば次の操作で水を「足す」。水が入っていれば，他方の容器に水を「移す」操作を行う容器。

〔7dl の容器〕

他方の容器から水を「移される」容器。この容器の水がいっぱいになれば，次の操作で水槽に水を「戻す」。

なお，水を「足す」操作と,「戻す」操作では,「足す」操作を優先するものとする。すなわち，5dl の容器が空で，7dl の容器がいっぱいのときは，5dl の容器に水を足す操作を先に行うこととする。

このような条件のもと，２つの容器を用いてつくられる量は次の通りである。



上の図で表した操作の過程を１つ１つ抜き出して表にまとめると次のようになる。

回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
7dl	0	5	5	7	0	3	3	7	0	1	1
5dl	5	0	5	3	3	0	5	1	1	0	5
計	5	5	10	10	3	3	8	8	1	1	6

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
6	6	7	0	4	4	7	0	2	2	7	7
0	5	4	4	0	5	2	2	0	5	0	5
6	11	11	4	4	9	9	2	2	7	7	12

《表１：７ dl と５ dl の容器の場合》

第 24 回目以降の操作については再び第１回目の操作に戻ることがわかる。また，つくられる量がそれぞれの容器の容量の上限の和である 12dl 以下となることは明らかである。表から，7dl の容器と 5dl の容器を用いてつくられる量は次の通りである。

$$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

次に，２つの容器の容量が「10dl と 2dl」の場合を考えると，つくられる量は次の通りである。

$$\{2,4,6,8,10,12\}$$

> [性質]
> 各々の容量が，Adl，Bdl である２つの容器を使って，A＋B 以下の A と B の最大公約数の倍数のすべてを表すことができる。

〔解説〕

A＝B のときは明らか。

A ＞ B とする。また，B で水を足す回数を x，A で移す回数を y とする。

A dl の容器に入っている水の量を α_{xy} とすると，$\alpha_{xy} = \mathrm{B}x - \mathrm{A}y$ と表せる。ただし，x，$y \geqq 0$，$0 \leqq \mathrm{B}x - \mathrm{A}y \leqq \mathrm{A}$ である。

このとき，Bdl の容器に入っている水の量を β_{xy} とすると，$\beta_{xy} = 0$ *or* B としてよい。

また，(A,B)＝t とすると，A＝at，B＝bt と表せる。ただし，(a，b)＝1 とする。

操作を続けて，初めて α_{xy}＝A となったとき，β_{xy}＝B と B の容器に水を足せば，次には $\alpha_{xy} = 0$ となり，以降は同じ操作が繰り返される。よって，初めて α_{xy}＝A となるときまでを考えればよい。

上で述べたことより，$bx - ay = a$ となる $(x,y) \in \mathrm{N}\times\mathrm{N}$ を考える。$bx = a(y+1)$ となり，$(a,b) = 1$ より，$x = ak$，ここで $k \in \mathrm{N}$ である。このとき $y = bk - 1$ となる。よって，はじめて α_{xy}＝A となるのは $x = a, y = b - 1$ のときである。

このことから，$0 \leqq x \leqq a$ かつ $0 \leqq y \leqq b - 1$ の範囲で考えればよい。

つくられる量 $\alpha_{xy} + \beta_{xy}$ が A＋B 以下の t の倍数の全てを表すことを示す。このためには，$\alpha'_{xy} = bx - ay$，$\beta'_{xy} = 0$ *or* b，とおいて，$\alpha'_{xy} + \beta'_{xy}$ が $a + b$ 以下の全ての自然数を表すことを示せばよい。$0 \leqq \mathrm{B}x - \mathrm{A}y \leqq \mathrm{A}$ より，$\alpha'_{xy} \leqq a$ となり，a より大きい $a + b$ 以下の自然数を表すためには，常に $\beta'_{xy} = b$ でなければならない。よって α'_{xy} が a 以下の全ての自然数を表すことを示せば十分である。

$x = 0$ のとき $y = 0$ となるから，整理すると，$(0 \leqq) bx - ay = r_{xy} (\leqq a)$ が，$1 \leqq x \leqq a$，$0 \leqq \mathrm{y} \leqq b - 1$ の範囲で a 以下の全ての自然数を表すことを示せばよい。

$x = 1, 2, \cdots, a$ のとき，bx は $b, 2b, \cdots, ab$ の異なる a 個の自然数を表す。

$x \neq x'$ とする。ただし，$1 \leqq x, x' \leqq a$。また，$x > x'$ としてよい。

ここで，$r_{xy} \neq r'_{xy}$ をいえばよい。

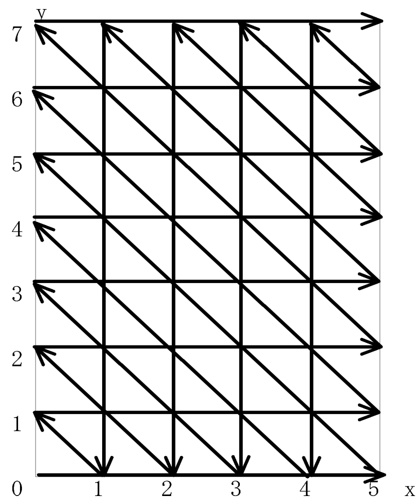
$r_{xy} = r'_{xy}$ とすると，$bx - ay = bx' - ay'$ より，$b(x - x') = a(y - y')$ となる。$(a,b) = 1$ より，$x - x' = ak$ ここで $k \in \mathrm{N}$ である。一方，$1 \leqq x, x' \leqq a$ より，$-(a-1) \leqq x - x' \leqq a - 1$ となり，これは矛盾である。よって，$r_{xy} \neq r'_{xy}$ である。

$bx = b, 2b, \cdots, ab$ の異なる a 個の自然数に対し，r_{xy} が得られ，それらは全て異なる a 以下の自然数である。よって，r_{xy} は 1 から a までの自然数の全てを表す。

以上より，$\alpha_{xy} + \beta_{xy}$ が A＋B 以下の t の倍数の全てを表すことがいえる。

(4) 水の量の移り変わりかた

7dl と 5dl の容器を用いて操作を行った場合に２つの容器の水の量を $x - y$ 平面上で表す。ここで，x 座標は 5dl の容器の水の量を表し，y 座標は 7dl の容器の水の量を表す。そして，それらの点を順番に結んでいくと以下のようになる。（[2] P.84 参照）



操作の順に座標をとり，それぞれの点を順番に結んでいく。すると矢線をかく手順がアルゴリズム化されている。また，上述のように矢線を引いていくと，最初の (0,0) から最後の (5,7) まで，各々の格子点を１度しか通らずに到達することが分かる。すなわち，7＋5＝12 までのすべての自然数が一回だけつくられることがわかる。

5．本時の位置付け

小学校 6 年の「数や図形の見方」の単元において，倍数や約数について学び，整数の性質についての理解を一層深める。そしてこの単元の学習で，倍数や約数などの意味を理解し，最大公約数や最小公倍数などを見つけられるようになる。この単元の学習の後，この単元で学んだ内容に帰着して考えられるような教材を取り扱う。

本時において扱う課題は，2 つの容器を用いてつくられる量について調べることである。課題を追求する中で，2 つの容器を用いてつくられる量は各々の容器の最大公約数によって決まることに気付かせたい。

つくられる量の複雑な移り変わりの過程をできるだけ簡潔に表現し，考察していくことや，問題を予想を立てて追求し，どのような関係が成り立っているか，どのような規則性があるのかということを見出せる力は重要である。本時ではこのような力を養いたい。

6．本時のねらい

本時における具体的なねらいは，以下の通りである。

〔第 1 時〕

　つくられる量の移り変わりの過程を，図・表などを用いてわかりやすく表すことができる。

　4dl をつくる過程を振り返り，より簡単に 4dl をつくる方法に気付くことができる。

〔第 2 時〕

　つくられる量の移り変わりの過程を，図・表などを用いてわかりやすく表すことができる。

　2 つの容器を用いて，つくられる量を予想を立てて考えていくことができる。

　容器の容量を変え，考察していく中で，2 つの容器の容量とつくられる量は，これらの容器の容量の最大公約数の倍数となる規則性があることに気付く。

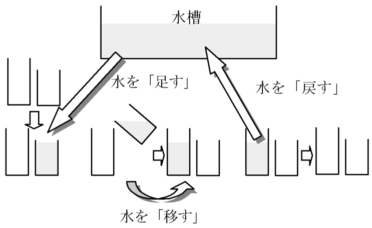
これらのねらいについて，指導案の中に評価規準を盛り込み，適切な場面で評価していくことを試みたい。

7．展開（第１時）

学習活動

[問題] 水がたくさんはいった水そうがあります。５ dl と３ dl の容器を使って，水を足したり，移したり，もどしたりして，つくれる量を考えます。４ dl つくりたい。どのようにしたらよいか。

◆操作についての説明

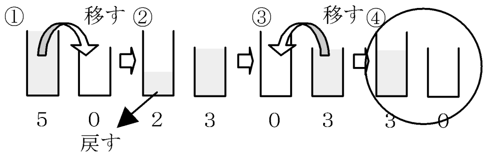


かんたんに４ dl をつくる方法を考えよう。

◆追求

◆発表

◆（方法を比較して）簡単で，早い操作の仕方はなんだろうか。



◯上の操作は 3dl の容器から 5dl の容器に移した操作と同じ。

◯両方の容器から交互に水を移す操作を行うと，効率の良い操作とはいえない。

◯どちらか一方から水を移していくとよい。

◆ 4dl の作り方を表でまとめよう。

回数	1	2	3	4	5	6	7
5dl	5	2	2	0	5	4	4
3dl	0	3	0	2	2	3	0
合計	5	5	2	2	7	7	4

回数	1	2	3	4	5	6	7	8
5dl	0	3	3	5	0	1	1	4
3dl	3	0	3	1	1	0	3	0
合計	3	3	6	6	1	1	4	4

◆ 4dl をつくるまでの水の量を見て，気付く事はないか。

◯途中で，5dl,2dl,7dl,3dl,6dl,1dl がつくられていることが分かる。2 つの容器に満杯に水を入れたら，8dl もできる。

◯つくられる量は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$。

◆次回への見通しをもつ。

容器の容量を変えると，つくれる量はどうなるだろう。

ねらい

・問題の意味を理解することができる。

・『操作の仕方（「足す」,「移す」,「戻す」）』を理解できる。

・操作の仕方を十分理解し, 目的とする量をつくるまでの過程を分かりやすく記録することができる。

・ 操作の様子を簡潔に表現することができる。

・操作の過程でつくられる水の量に着目し, 効率の良い操作に気付くことができる。

・効率のよい操作について理解し, 用いる事ができる。

指導・援助

□ 言葉と操作を結び付けやすいように, 操作を具体物を用いて視覚的に表す。

□ 水の量をで表す。

□ 操作の仕方やつくれる量について図示し，理解を深める。

□「どうやってつくったのかをわかりやすく説明できるように，つくり方を記録しようね。」と声かけをし，操作の過程を明らかにさせる。

□ 追求時，手の進まない児童には，用意してある具体物を用いて考えさせる。

□ 同じ操作やより簡単な操作を見出し，どのように操作を行っていけばよいのか明確にする。

□ 図はわかりやすいが，記録していくのが面倒であることから，表のよさに気付かせる。

□ 進度のはやい児童に対しては，わかったことについてまとめさせ，他の量についての追求をさせる。

展開（第２時）

学習活動	ねらい	指導・援助
◆前時の授業で，5dl と 3dl の容器では 1〜8dl がつくれることが分かった。 ◆容器の容量とつくれる量には何かきまりがあるだろうか。予想してみよう。 ◯容器の容量の合計までつくれる。 ◯全部つくることができる。 ↓ ◯2dl と 4dl のときは，2,4,6 しかつくれない。 「容器の容量」と「つくれる量」にはどんな関係があるだろうか。 ◆個人追求する。 ◆２つの容器の容量とつくられる量を黒板に書かせていく。 1dl と 2dl の容器 1,2,3 ／ 2dl と 4dl の容器 2,4,6 ／ 3dl と 6dl の容器 3,6,9 2dl と 3dl の容器 1,2,3,4,5 ／ 4dl と 6dl の容器 2,4,6,8,10 ／ 3dl と 9dl の容器 3,6,9,12 4dl と 5dl の容器 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ／ 4dl と 8dl の容器 4,8,12 ／ 6dl と 9dl の容器 3,6,9,12,15 ◆ (黒板や自分の追求を見て) 気付いたことを発表させる。 ◯２つの容器の容量の和までつくることができる。 ◯つくられる量には倍数の関係がある。 1dl と 2dl のとき，1 の倍数 3dl と 5dl のとき，1 の倍数 2dl と 1dl のとき，2 の倍数 ◯2 つの容器からつくられる量は，容器の容量の最大公約数の倍数になっている。 ◆【練習問題】 12dl と 9dl の容器からつくられる量を求めよう。 {3,6,9,12,15,18,21} ◇自己評価	・簡単な場合について考えることで，予想を立て，課題意識をもたせる。 ・自ら２つの容器の容量を設定し，主体的に追及を進めていくことができる。 ・容器の容量とつくられる量に着目しながら追求ができているか。 ・いくつかの考察の結果から，２つの容器の容量とつくられる量について，どのような関係が成り立っているか気付くことができる。 上限は２つの容器の容量の和である。 つくられる量には倍数の関係がある。 ２つの容器の容量の最大公約数の倍数となっている。 ・最大公約数の関係を見出すことができる。 ・見出した性質を用いて，問題を解くことができる。 ・自らの学習の様子を振り返り，的確に自己評価を行うことができる。	□「例えば，2dl と 4dl の容器で考えると，つくれる量はどうなるだろう」と，簡単な場合について考えさせる。 □1 人１人が，容量を決めて，課題追求をする。 □ つくられた量について，似ているところはどこか「違うところはどんなところか」と声かけをする。 □ 学習進度の遅い児童に対しては，黒板を見て気付くことはないかと声かけをする。 □2 つの容器の容量の最大公約数が，1 の場合，2 の場合，3 の場合を取り上げる。 □ ２つの容器の容量と，◯ の倍数にはどんな関係があるだろうか。 □「今までの算数の勉強でこれと同じにみられるものはないか」と声掛けをする。

8. 自己評価の項目

子ども達に自己評価をさせるときの評価の項目については以下の通りとする。

　進んで活動に取り組むことができましたか？

　つくり方をわかりやすく表そうと考えながらできましたか？

　「かんたんに 4dl をつくろう」と思いながら，取り組むことができましたか？

　「かんたんに 4dl をつくる方法」に気付くことができましたか？

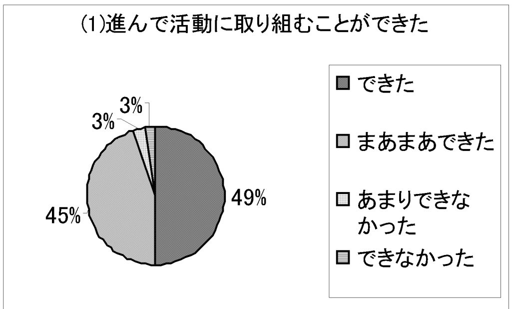
　『「容器の容量」と「つくられる量」に何かきまりはないか』と，考えながら取り組めましたか？

　「容器の容量」と「つくられる量」との関係に気付くことができましたか？

9. 授業実践の結果と考察

(1) 教材についての考察

今回，ねらいを達成するための教材として，和算を取り上げた。和算とは西洋の数学が伝わる以前からあった日本の数学である。この和算を取り扱う事により，児童たちの授業に対する興味関心を高めようと考えたからである。実際の授業において，導入時に和算の話をしたとき，これからはじまる授業内容に対する児童たちの興味・関心は非常に高いものであった。

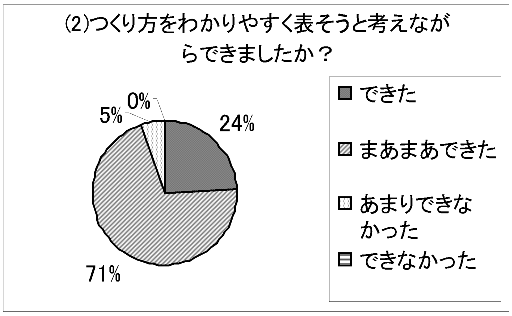


そして，アンケートの結果からもわかる通り，ほぼ全員が進んで活動に取り組めている。

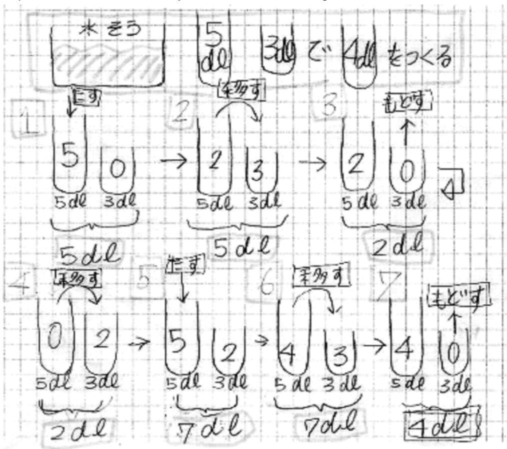
以上のことから，興味・関心という面から見ると，教材として和算を扱う価値が得られたと考える。

(2) 表現・処理についての考察

次に，第1時の授業について考察をしていく。第1時の授業では，5dl と 3dl を用いて 4dl のつくり方を考えた。ここで大切にしていたこととして,「4dl をつくる過程をわかりやすく表現すること」と「できるだけ簡単に 4dl をつくる方法を考えること」であった。わかりやすく表現することに関して，児童の目的意識はどうであったかを問うたアンケートの結果は以下である。

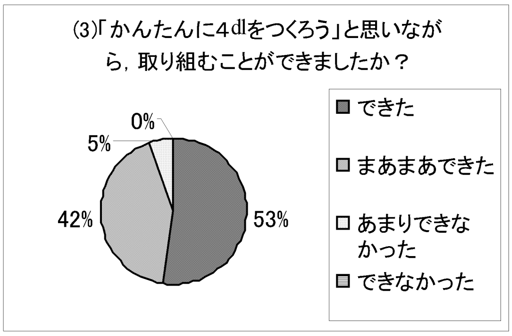


この結果が示す通り，ほとんどの児童がわかりやすく表現しようと意識をもって活動に取り組めていた事がわかる。

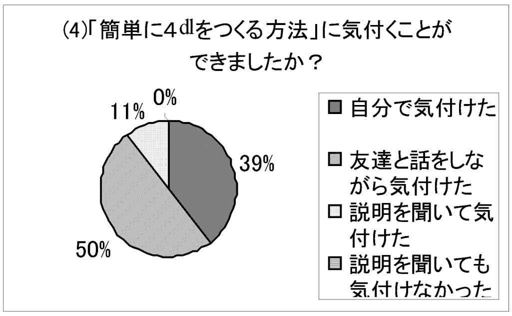


〈児童 Y. O のノートより〉

また，できるだけ簡単に 4dl をつくる方法を考えることに関して，児童の目的意識はどうであったかを問うたアンケートの結果は以下である。



この結果が示す通り，ほとんどの児童が簡単に4dlをつくる方法を考えようと活動に取り組めていた事がわかる。「目的意識をもって活動に取り組めば，事象を見る視点が絞られ，その中に潜む数理に気付きやすくなる※1」と考える。つまり本時の場合，簡単に4dlをつくる方法を考えようと強い目的意識をもって活動に取り組むことによって，自分の4dlをつくるまでの過程を振り返り，無駄な操作に気付き，簡単に4dlをつくる方法を見出すことができる。目的意識については前記のアンケートの結果が示す通りである。それを受けて，簡単に4dlをつくる方法に気付くことができたかを問うたアンケートの結果は以下である。

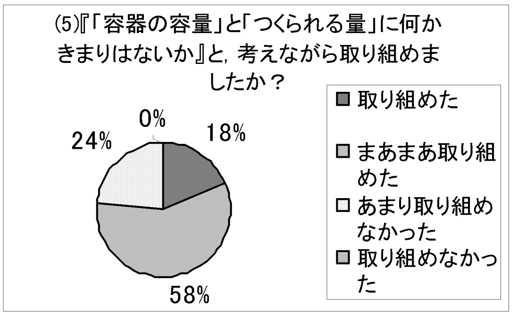


この結果が示す通り，約90％の児童が簡単な方法について気付くことができた。しかし，自分で気付けた児童については約40％であった。授業の様子から見て，ほとんどの児童が，わからなくなったらすでに気付いた児童に説明を聞いたり，ヒントをもらったりしていたためであると考えられる。そのためか，実際に児童のノートから，40人中37人が簡単な方法で4dlを求めることができていた。また，この点については，問題の難易度が予想に反して，児童にとって簡単なものであったとも考えられる。そのため，※1に対しての有効な結果は得られなかった。

自分の試行の結果を振り返り，重複している，あるいは無駄だと思われることを省いていくことにより，より簡単にならないかと考えていくことのよさを実感できると考える。ゆえに，教材の難易度，授業方法について，引き続き研究を深めていきたい。

(3) 第2時の考察

第2時の授業では，第1時のつくられる量の簡単な見つけ方を受けて，容器の容量とつくられる量にはどのような関係があるのかということを2つの容器を自分達でいろいろ決めて考察を行った。児童の目的意識を問うたアンケートの結果は以下である。



この結果から，約80％の児童が2つの量の関係を見つけようという目的意識をもって活動に取り組めていた。しかし，実際の児童の姿として，ほとんどの児童が自分で決めた2つの容器でつくられる量について考えることに夢中になり，その関係まで考えようという児童は少なかったと思われる。その要因として，課題に対する見通しがもてていなかったことが考えられる。

第2時の内容は，A_n と B_n から C_n という関係を見つける。そして C_n の考察から，A_n，B_n と C_n の関係を見つけるというものであった。このような学習は小学校では定着しておらず，学習内容として難易度の高いものであった。そこで，どのように追求を進めていくか

ということの示唆のため，児童たちが求めた容器の容量とそれによってつくられる量を黒板に意図的に分類整理した。このことによって，共通する点，異なる点について考察しやすくなり，関係について見出す事ができた。

新しい見方・考え方を見つける力を養っていく場合において，児童たちがそのような見方・考え方に自ら気付く事を期待しつつ，教師によって，考えていくための方向を示していく事が大切であると考える。そして，そのような見方・考え方で考察していく事のよさを児童たちに味わわせることが大切であるとことを再認識した。

10. まとめと課題

数学的な見方･考え方を養っていこうとするときに大切となってくるのは，強い目的意識である。このような意識をもって，追求を進める事によって，繰り返し自分の追求を振り返り，そして，よりよいものを求めようと追求ができると考える。実践事業を通して，児童たちが和算に高い興味・関心をもっていることが分かった。高い興味・関心から，強い目的意識を引き出し，数学的な見方・考え方を養えるような授業内容をさらに研究していきたい。

引用文献

[1] 和算研究所塵劫記委員会, 2000, 現代語『塵劫記』, 和算研究所.

[2] 片桐重男, 1996, 数学的な考え方を育てる「興味ある問題」の開発, 明治図書.

[3] 文部科学省，2002, 個に応じた指導に関する指導資料－発展的な学習や補充的な学習の推進－小学校算数科. http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/houdou/index.htm

[4] 平山諦, 1981, 東西数学物語, 恒星社.